Terminale Maths Groupe 1 **Corrigé du DS4** **Novembre 2024**

Exercice I

1) $\forall n \in \mathbb{N}$, $\frac{1}{2} \leqslant V_n \leqslant \frac{3n^2+4n+7}{6n^2+1}$.

$\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$ et pour $n \neq 0$, $\frac{3n^2+4n+7}{6n^2+1} = \frac{n^2(3+\frac{4}{n}+\frac{7}{n^2})}{n^2(6+\frac{1}{n^2})} = \frac{3+\frac{4}{n}+\frac{7}{n^2}}{6+\frac{1}{n^2}}$

Par limites de référence : $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{n} = 0$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{n^2} = 0$.

donc par limite de sommes et produit, $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(3+\frac{4}{n}+\frac{7}{n^2}\right) = 3$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(6+\frac{1}{n^2}\right) = 6$

Donc par limites de quotient, $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{3+\frac{4}{n}+\frac{7}{n^2}}{6+\frac{1}{n^2}} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$.

Bilan : $\frac{1}{2} \leqslant V_n \leqslant \frac{3n^2+4n+7}{6n^2+1}$ avec $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{3n^2+4n+7}{6n^2+1} = \frac{1}{2}$.

D'après le théorème des gendarmes : (V_n) converge vers $\frac{1}{2}$: $\lim\limits_{n\to+\infty} V_n = \frac{1}{2}$.

$\boxed{\text{L'affirmation (1) est vraie}}$

2) $t_0 = 20$; $\forall n \in \mathbb{N}$, $t_{n+1} = -0{,}8 t_n + 18$.

$\forall n \in \mathbb{N}$, $w_n = t_n - 10$

Donc $w_{n+1} = t_{n+1} - 10 = -0{,}8 t_n + 18 - 10 = -0{,}8 t_n + 8 = -0{,}8 \underbrace{(t_n - 8)}_{= w_n}$

donc $w_{n+1} = -0{,}8 w_n$; ainsi (w_n) est bien une suite géométrique de raison $q = -0{,}8$: $\boxed{\text{l'affirmation (2) est vraie}}$.

3) La suite (u_n) correspondant à ce programme est définie par :

$u_0 = 2$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = 0{,}5\left(u_n + \frac{2}{u_n}\right)$.

(u_n) décroît et $\underbrace{\forall n \in \mathbb{N},\ 1 \leqslant u_n \leqslant 2}_{(*)}$, donc (u_n) est minorée par 2.

Or toute suite décroissante et minorée converge.

donc $\boxed{(u_n) \text{ converge}}$. Soit $\ell = \lim\limits_{n\to+\infty} u_n$; grâce à $(*)$, on a déjà : $1 \leqslant \ell \leqslant 2$.

$\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = 0{,}5\left(u_n + \frac{2}{u_n}\right)$, donc par passage à la limite et unicité de cette dernière, on a : $\ell = 0{,}5\left(\ell + \frac{2}{\ell}\right) \iff \ell = 0{,}5\ell + \frac{1}{\ell} \iff \ell - 0{,}5\ell = \frac{1}{\ell}$

par limite de somme, produit et quotient $\iff 0{,}5\ell = \frac{1}{\ell} \iff 0{,}5\ell^2 = 1$

Donc $\ell^2 = \frac{1}{0,5} = 2$ et comme $1 \leq \ell \leq 2$, $\ell > 0$, par suite $\ell = \sqrt{2}$.

La suite (u_n) converge vers $\sqrt{2}$: $\boxed{\text{l'affirmation 3 est FAUSSE}}$.

Exercice II

1) $u_1 = (3000 + 80) \times 0,95 = 3080 \times 0,95 = 2926$.

2) Entre le 01/06 et le 31/10 de l'an 2023 + n, le nombre de cétacés augmente de 80, donc passe de la valeur u_n à $u_n + 80$.

Entre le 01/11 et le 31/05 le nombre baisse de 5 % ; donc est multiplié par $CM = 1 - \frac{5}{100} = 0,95$

Ainsi, en l'an 2023 + n + 1, il y aura : $u_{n+1} = (u_n + 80) \times 0,95$ cétacés.

En développant, on a : $u_{n+1} = 0,95 u_n + 80 \times 0,95$

Ainsi, pour tout entier n, $\boxed{u_{n+1} = 0,95 u_n + 76}$

3a) $n \in \mathbb{N}$ et $\mathcal{P}(n)$ est la propriété : $u_n \geq 1520$.

Initialisation : Pour $n = 0$, $u_0 = 3000$. Or $3000 \geq 1520$ est vrai, donc $\mathcal{P}(0)$ est vraie.

Hérédité : Soit n un entier naturel fixé. Supposons que pour cet entier là, $\mathcal{P}(n)$ soit vraie c'est à dire supposons que : $\underbrace{u_n \geq 1520}_{\text{hypothèse de récurrence}}$.

Montrons que $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie, à savoir que : $\underbrace{u_{n+1} \geq 1520}_{\text{But}}$.

Or par hypothèse de récurrence : $u_n \geq 1520$

donc $0,95 u_n \geq 0,95 \times 1520$ (car $0,95 > 0$, sens inchangé).

$0,95 u_n \geq 1444$

donc $\underbrace{0,95 u_n + 76}_{= (q.2)} \geq 1444 + 76$

donc $u_{n+1} \geq 1520$, donc $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie.

Conclusion : $\mathcal{S}(0)$ est vraie, et pour tout entier naturel n, $\mathcal{S}(n)$ est héréditaire – donc d'après le principe de récurrence : $\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ u_n \geqslant 1520}$.

3b) D'après (q.2) : $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = 0{,}95u_n + 76$.

donc : $u_{n+1} - u_n = 0{,}95u_n + 76 - u_n$.

$u_{n+1} - u_n = -0{,}05u_n + 76$.

Or d'après q.3a), $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n \geqslant 1520$, donc $-0{,}05u_n \leqslant -0{,}05 \times 1520$,

car -0,05 < 0.

donc $\forall n \in \mathbb{N},\ -0{,}05u_n \leqslant -76$, donc $\underbrace{-0{,}05u_n + 76}_{= u_{n+1} - u_n} \leqslant 0$.

Ainsi, on a bien : $\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} - u_n \leqslant 0 \text{ : la suite } (u_n) \text{ est décroissante}}$.

c) D'après q.3a), (u_n) est MINOREE par 1520.

D'après q.3b), (u_n) est décroissante.

Or toute suite décroissante et minorée converge –

donc $\boxed{(u_n) \text{ converge}}$ (d'après le th. de convergence des suites monotones).

3d) Soit $L = \lim\limits_{n \to +\infty} u_n$

D'après q.2), $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = 0{,}95u_n + 76$.

Par passage à la limite et unicité de cette dernière, on a : $\lim\limits_{n \to +\infty} u_{n+1} = \lim\limits_{n \to +\infty} (0{,}95u_n + 76)$

Or $\lim\limits_{n \to +\infty} u_{n+1} = L$ et par opérations sur les limites, $\lim\limits_{n \to +\infty} (0{,}95u_n + 76) = 0{,}95L + 76$

donc : $L = 0{,}95L + 76$

$L - 0{,}95L = 76$

$0{,}05L = 76$

$L = \frac{76}{0{,}05} = 1520$.

$\mathcal{S} = \{1520\}$ et $\boxed{\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = 1520}$

3e) D'après la question 3d), $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = 1520$. Or $1520 < 2000$.
Donc, à long terme, le nombre de cétacés sera inférieur à 2000 ce qui entraînera la fermeture de la réserve.

4a) Cette fonction Python renvoie en sortie l'année à partir de laquelle la population de cétacés devient strictement INFERIEURE à 2000 individus.

4b) Avec cette suite (u_n), à l'aide de sa machine à calculer, on a : $u_n < 2000$ dès que : $n \geqslant 22$.

L'algorithme retournera en sortie : 2023+22 = 2045 : c'est à partir de l'an 2045 que le nombre de cétacés deviendra strictement inférieur à 2000 (il passe sous le seuil des 2000 individus).

Exercice III

1. **a.**

$$u_1 = 5u_0 - 4 \times 0 - 3 = 5 \times 3 - 4 - 3 = 15 - 7 = \boxed{12}$$

b.

$$u_2 = 5u_1 - 4 \times 1 - 3 = 5 \times 12 - 4 - 3 = 60 - 7 = \boxed{53}$$

c. Il semble que la suite (u_n) soit croissante et tende vers $+\infty$.

En effet, le tableau suivant, recopié sur la calculatrice permet d'émettre ces conjectures :

n	0	1	2	3	4	5	6	7
u_n	3	12	53	254	1255	6256	31257	156258

2. **a.** Soit P_n la proposition $u_n \geqslant n+1$.
Initialisation : $u_0 = 3$ et $0+1 = 1$.
$3 \geqslant 1$. La proposition est donc vraie au rang $n = 0$.

Hérédité : on suppose la proposition vraie au rang $n \in \mathbb{N}$, $u_n \geqslant n+1$ (hypothèse de récurrence).
On va vérifier qu'alors elle est vraie au rang suivant.

$$\begin{aligned} u_n \geqslant n+1 &\iff 5u_n \geqslant 5(n+1) \\ &\iff 5u_n - 4n - 3 \geqslant 5n + 5 - 4n - 3 \\ &\iff u_{n+1} \geqslant n+2 = (n+1)+1 \end{aligned}$$

La proposition est donc héréditaire.

Conclusion : la proposition P_n est vérifiée au rang $n = 0$ et est héréditaire, donc, d'après le principe de récurrence, elle est vraie pour tout entier naturel n : $u_n \geqslant n+1$.

b. On a : $\lim\limits_{n \to +\infty} (n+1) = +\infty$. Puisque $u_n \geqslant n+1$, par comparaison, on a :

$$\boxed{\lim_{n \to +\infty} u_n = +\infty}$$

3a)

Pour tout entier naturel n : $v_{n+1} = u_{n+1} - (n+1) - 1$ (Attention à ne pas oublier les parenthèses).

$v_{n+1} = 5u_n - 4n - 3 - n - 1 - 1$ car $u_{n+1} = 5u_n - 4n - 3.$

$\boxed{v_{n+1} = 5u_n - 5n - 5 = 5(u_n - n - 1) = 5\, v_n.}$

Donc la suite (v_n) est bien une suite géométrique de raison q = 5.

Son premier terme est : $\boxed{v_0 = u_0 - 0 - 1 = 3 - 1 = 2.}$

3b) D'après la question précédente, (v_n) est une suite géométrique de raison q = 5 et $v_0 = 2$

Donc pour tout entier naturel n, $v_n = v_0 \times q^n = 2 \times 5^n$.

3c) Pour tout entier naturel n, $v_n = u_n - n - 1$ donc $u_n = v_n + n + 1$ =$2 \times 5^n + n + 1$ d'après q.3b).

3d) Pour tout entier naturel n : $u_{n+1} - u_n$ = $2 \times 5^{n+1} + n + 2 - (2 \times 5^n + n + 1)$.

$u_{n+1} - u_n$ = $2 \times 5^{n+1} + n + 2 - 2 \times 5^n - n - 1$

$u_{n+1} - u_n$ = $2 \times 5^{n+1} - 2 \times 5^n + 1$ = $2 \times 5^n \times (5 - 1) + 1$

$u_{n+1} - u_n$ = $8 \times 5^n + 1$.

Or 5 > 0, donc pour tout entier naturel n, $5^n > 0$, donc comme $8 > 0$ on a :

$8 \times 5^n > 0$, donc $8 \times 5^n + 1 > 1 > 0$, donc : $u_{n+1} - u_n > 0$: la suite (u_n) est donc strictement croissante.

4. a.

```
def suite():
   u=3
   n=0
   while u<10**7:
      u= 5*u-4*n-3
      n=n+1
   return n
```

4b)

u	n	u < 10^7
3	0	VRAI
12	1	VRAI
53	2	VRAI
254	3	VRAI
1 255	4	VRAI
6 256	5	VRAI
31 257	6	VRAI
156 258	7	VRAI
781 259	8	VRAI
3 906 260	9	VRAI
19 531 261	10	FAUX

La valeur renvoyée par cette fonction est $n = 10$. C'est le rang à partir duquel $u_n \geqslant 10^7$.