Terminale Maths Groupe 1 **Corrigé du DS3** **Octobre 2024**

Exercice d'échauffement

a) $\boxed{\lim\limits_{n \to +\infty} U_n = +\infty}$

b) Une suite (V_n) converge vers -3

c) $4n^3 + 3n^2 - 2n + 1 = \boxed{n^3\left(4 + \frac{3}{n} - \frac{2}{n^2} + \frac{1}{n^3}\right)}$ Oui.

Exercice I

a) $n^2 + 3n + 1$

Par limite de référence : $\lim\limits_{n \to +\infty} n^2 = +\infty$; $\lim\limits_{n \to +\infty} 3n = +\infty$

Par limite de somme : $\boxed{\lim\limits_{n \to +\infty} (n^2 + 3n + 1) = +\infty}$ Oui.

b) $-2\sqrt{n}\,(n^2+1)$

Par limite de référence : $\lim\limits_{n \to +\infty} \sqrt{n} = +\infty$; $\lim\limits_{n \to +\infty} n^2 = +\infty$

Par limite de somme : $\lim\limits_{n \to +\infty} n^2 + 1 = +\infty$

Par limite de produit : $\boxed{\lim\limits_{n \to +\infty} -2\sqrt{n}\,(n^2+1) = -\infty}$ Oui.

c) $n^3 - n^2 + 1 = n^3\left(1 - \frac{1}{n} + \frac{1}{n^3}\right)$ pour $n \neq 0$.

Par limite de référence : $\lim\limits_{n \to +\infty} n^3 = +\infty$; $\lim\limits_{n \to +\infty} \frac{1}{n} = 0$; $\lim \frac{1}{n^3} = 0$

Par limite de somme : $\lim\limits_{n \to +\infty} \left(1 - \frac{1}{n} + \frac{1}{n^3}\right) = 1$

Par limite de produit $\lim\limits_{n \to +\infty} n^3\left(1 - \frac{1}{n} + \frac{1}{n^3}\right) = \boxed{\lim\limits_{n \to +\infty} n^3 - n^2 + 1 = +\infty}$ Oui.

d) $\left(\frac{1}{\sqrt{n}} + 4\right)(0{,}75 - 0{,}25 \times 0{,}84^n)$

Par limite de référence : $\lim\limits_{n \to +\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} = 0$ Oui

$0{,}84^n$ est une suite géométrique de raison $q = 0{,}84$.

$-1 < 0{,}84 < 1$ donc $\lim\limits_{n \to +\infty} 0{,}84^n = 0$ Bien

Par limite de produit : $\lim\limits_{n \to +\infty} (-0{,}25) \times 0{,}84^n = 0$

Par limite de somme : $\lim\limits_{n \to +\infty} \left(\frac{1}{\sqrt{n}} + 4\right) = 4$; $\lim\limits_{n \to +\infty} (0{,}75 - 0{,}25 \times 0{,}84^n) = 0{,}75$

Par limite de produit $\boxed{\lim\limits_{n \to +\infty} \left(\frac{1}{\sqrt{n}} + 4\right)(0{,}75 - 0{,}25 \times 0{,}84^n) = 3}$ Oui.

e) $\dfrac{\frac{1}{\sqrt{n}} - \frac{1}{n^2} + 4}{-3+2\sqrt{n}}$

Par limite de référence : $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{\sqrt{n}} = 0$; $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{n^2} = 0$; $\lim\limits_{n\to+\infty} 2\sqrt{n} = +\infty$

Par limite de somme : $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\dfrac{1}{\sqrt{n}} - \dfrac{1}{n^2} + 4\right) = 4$; $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(-3+2\sqrt{n}\right) = +\infty$

Par limite de quotient : $\boxed{\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\dfrac{\frac{1}{\sqrt{n}} - \frac{1}{n^2} + 4}{-3+2\sqrt{n}}\right) = 0}$ Oui

f) $\dfrac{n^2 - 3n + 1}{2n^2+5} = \dfrac{1 - \frac{3}{n} + \frac{1}{n^2}}{2 + \frac{5}{n^2}}$ pour $n \neq 0$.

Par limite de référence : $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{3}{n} = 0$; $\lim \dfrac{1}{n^2} = 0$; $\lim \dfrac{5}{n^2} = 0$

Par limite de somme : $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(1 - \dfrac{3}{n} + \dfrac{1}{n^2}\right) = 1$; $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(2 + \dfrac{5}{n^2}\right) = 2$

Par limite de quotient : $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1 - \frac{3}{n} + \frac{1}{n^2}}{2 + \frac{5}{n^2}} = \boxed{\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{n^2 - 3n + 1}{2n^2+5} = \dfrac{1}{2}}$ Oui

g) $3^n - 4^n = 4^n\left(\dfrac{3^n}{4^n} - 1\right) = 4^n\left(\left(\dfrac{3}{4}\right)^n - 1\right)$ Oui

4^n et $\left(\dfrac{3}{4}\right)^n$ sont des suites géométriques de raison q

$4 > 1$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty} 4^n = +\infty$ Oui

$-1 < \dfrac{3}{4} < 1$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(\dfrac{3}{4}\right)^n = 0$ Oui

Par limite de somme : $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(\dfrac{3}{4}\right)^n - 1 = -1$

Par limite de produit : $\lim\limits_{n\to+\infty} 4^n\left(\left(\dfrac{3}{4}\right)^n - 1\right) = \boxed{\lim 3^n - 4^n = -\infty}$ Oui

Exercice II

1) Calculons les limites des termes qui encadrent la suite :

$\lim_{n \to +\infty} (1 - 0{,}2^n) = 1$ par limite de somme

et $\lim_{n \to +\infty} (0{,}2^n) = 0$

car $-1 < 0{,}2 < 1$. Oui

$\lim_{n \to +\infty} \left(\frac{2}{n^2} + 1\right) = 1$ par limite de somme

car $\lim_{n \to +\infty} \left(\frac{2}{n^2}\right) = 0$

La suite (u_n) est encadrée par deux valeurs qui convergent en une même limite finie, 1.
Ainsi, selon le théorème des Gendarmes, on peut conclure que (u_n) converge vers 1. Bien

$$\boxed{\text{Ainsi } \lim_{n \to +\infty} (u_n) = 1}$$

2) a) $(-1)^n$ prend alternativement les valeurs -1 et 1, on peut donc marquer

$$-1 \leq (-1)^n \leq 1$$

$$\iff -1+3n^2 \leq (-1)^n+3n^2 \leq 1+3n^2$$

$$\iff \frac{-1+3n^2}{n} \leq \frac{(-1)^n+3n^2}{n} \leq \frac{1+3n^2}{n} \quad \text{Car } n>0$$

$$\iff \frac{-1+3n^2}{n} \leq v_n \leq \frac{1+3n^2}{n}$$

donc $v_n \geq \dfrac{-1+3n^2}{n}$

$$\iff v_n \geq -\frac{1}{n}+\frac{3n^2}{n}$$

$$\iff \boxed{v_n \geq 3n - \frac{1}{n}}$$ Oui

b) Calculons la limite de $3n-\frac{1}{n}$

$\lim\limits_{n\to+\infty}\left(3n-\frac{1}{n}\right) = +\infty$ par limite de somme car $\lim\limits_{n\to+\infty}(3n) = +\infty$

et $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{n}\right) = 0$

Ainsi la limite de $3n-\frac{1}{n}$ est $+\infty$

or $v_n \geq 3n-\frac{1}{n}$ Oui

Ainsi, on peut affirmer selon le théorème de comparaison des limites divergentes que

$\boxed{\lim\limits_{n\to+\infty}(v_n) = +\infty.}$ Oui

Exercice III

Question 1 : réponse C (bornée, elle est minorée par -1 et majorée par 1).

Question 2 : Réponse B (limite de type « $0/\infty$ ».

Exercice IV

On choisit n=4 en tapant terme(4), donc $0 \leqslant i < 4$, et comme i est entier, on entre successivement 4 fois dans la boucle, et on calcule donc le terme u_4 de la suite récurrente définie par : $u_0=1$ et pour tout entier naturel n, $u_{n+1}=u_n + n$.

Ainsi : $u_1 = u_0 + 0 = 1 + 0 = 1$; $u_2 = u_1 + 1 = 1 + 1 = 2$; $u_3 = u_2 + 2 = 2 + 2 = 4$; $u_4 = u_3 + 3 = 4 + 3 = 7$.

L'affirmation 1 est donc VRAIE .

Soit la suite (S_n) qui vérifie pour tout $n \in \mathbb{N}^*$: $3n-4 \leqslant S_n \leqslant 3n+4$.

La suite (u_n) est définie, pour tout entier naturel n non nul, par : $u_n = \dfrac{S_n}{n}$.

Affirmation 2 : La suite (u_n) converge.

$n > 0$ donc

$3n-4 \leqslant S_n \leqslant 3n+4$. entraîne $\dfrac{3n-4}{n} \leqslant \dfrac{S_n}{n} \leqslant \dfrac{3n+4}{n}$ c'est-à-dire $3 - \dfrac{4}{n} \leqslant u_n \leqslant 3 + \dfrac{4}{n}$.

- $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{4}{n} = 0$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty} 3 - \dfrac{4}{n} = 3$
- $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{4}{n} = 0$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty} 3 + \dfrac{4}{n} = 3$
- Pour tout $n > 0$: $3 - \dfrac{4}{n} \leqslant u_n \leqslant 3 + \dfrac{4}{n}$

Donc, d'après le théorème des gendarmes, on peut déduire que la suite (u_n) est convergente et que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 3$.

Affirmation 2 vraie