Exercice I

$x>0$ et $f(x)=x\ln(x)$.
f est dérivable sur $]0;+\infty[$ (produit de fonctions dérivables) et : $f'(x)=1\times\ln(x)+x\times\frac{1}{x}$

$f'(x)=\ln(x)+1$.

Donc pour $x>0$, $\underline{xf'(x)-f(x)}=x(\ln(x)+1)-x\ln(x)=x\ln(x)+x-x\ln(x)=\underline{x}$

L'affirmation 1 est VRAIE.

Soit G une primitive de g sur $\mathbb{R}$: alors G est dérivable sur $\mathbb{R}$ et on a :

$\forall x\in\mathbb{R}$, $G'(x)=g(x)=1+2e^{-x^2+5}$.

Or $\underline{\forall x\in\mathbb{R}}$, $e^{-x^2+5}>0$, donc $1+2e^{-x^2+5}>0$, donc $g(x)>0$.

Ainsi, $\forall x\in\mathbb{R}$, $G'(x)>0$: G est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

Toute primitive de g sur $\mathbb{R}$ est strictement croissante sur $\mathbb{R}$: $\boxed{\text{Affirmation 2 : FAUSSE}}$.

Soit $f(x)=c$ où $c\in\mathbb{R}$.

$f'(x)=0$. f solution de (E) sur $\mathbb{R}$ si : $\forall x\in\mathbb{R}$, $\underbrace{f'(x)}_{\overset{\shortparallel}{0}}=\frac{3}{2}f(x)+2$

$0=\frac{3}{2}\times c+2$ donc $\frac{3}{2}c=-2$

$c=-2\times\frac{2}{3}=-\frac{4}{3}$.

Donc $\forall x\in\mathbb{R}$, $f(x)=-\frac{4}{3}$: $\boxed{\text{L'affirmation 3 est VRAIE}}$.

Résolvons (E) : $y'=\frac{3}{2}y+2$ (de la forme : $y'=ay+b$ avec $a=\frac{3}{2}$; $b=2$).

D'après le cours $\mathcal{S}_{(E)}=\left\{\begin{array}{l}\mathbb{R}\to\mathbb{R}\\ x\mapsto ke^{\frac{3}{2}x}-\frac{4}{3}\end{array}\ ;k\in\mathbb{R}\right\}$. ($x\mapsto ke^{3/2x}-\frac{b}{a}$ mais ici grâce à l'affirmation $\boxed{3}$, $-\frac{b}{a}=-\frac{4}{3}$).

$h\in\mathcal{S}(E)$, donc $\exists k\in\mathbb{R}$, $\forall x\in\mathbb{R}$, $h(x)=ke^{\frac{3}{2}x}-\frac{4}{3}$.

$h(0)=0 \iff ke^0-\frac{4}{3}=0 \iff k=\frac{4}{3}$

donc $\forall x\in\mathbb{R}$, $h(x)=\frac{4}{3}e^{\frac{3}{2}x}-\frac{4}{3}$.

La tangente à $\mathcal{C}_h$ au point d'abscisse 1 a pour coefficient directeur : $h'(1)$.

Or $\forall x\in\mathbb{R}$, $h'(x)=\frac{4}{3}\times\frac{3}{2}e^{\frac{3}{2}x}=2e^{\frac{3}{2}x}$, donc $h'(1)=2e^{3/2}$;

$\boxed{\text{l'affirmation 4 est VRAIE}}$. <u>Autre possibilité</u> : $h'(1)=\frac{3}{2}h(1)-\frac{4}{3}$ car h sol. de (E)

Exercice II

1a) $f(x) = e^{-2x} + x^2 + 6x - 1$.

F définie sur $\mathbb{R}$ par : $\underline{F(x)} = \frac{e^{-2x}}{-2} + \frac{x^3}{3} + \frac{6x^2}{2} - x = \underline{\underline{-\frac{e^{-2x}}{2} + \frac{x^3}{3} + 3x^2 - x}}$

est une primitive de f sur $\mathbb{R}$.

b) $x \in \mathbb{R}$ et $g(x) = -x e^{x^2+2025}$. Soit $\begin{cases} u(x) = x^2 + 2025 \\ u'(x) = 2x. \end{cases}$

$g(x) = -\frac{1}{2} \times 2x\, e^{x^2+2025} = -\frac{1}{2} \times u'(x) e^{u(x)}$.

donc G définie sur $\mathbb{R}$ par : $\underline{G(x)} = -\frac{1}{2} e^{u(x)} = \underline{\underline{-\frac{1}{2} e^{x^2+2025}}}$ est une primitive de g sur $\mathbb{R}$

c) $x > 0$ (ici on peut même dire $x \in \mathbb{R}$ car $\forall x \in \mathbb{R}$, $e^x > 0$, $e^{-x} > 0$, donc $e^x + 2e^{-x} > 0$).

$h(x) = \frac{e^x - 2e^{-x}}{e^x + 2e^{-x}}$. Posons $\begin{cases} u(x) = e^x + 2e^{-x}. \\ u'(x) = e^x + 2 \times (-e^{-x}) = e^x - 2e^{-x}. \end{cases}$

Ainsi, $h(x) = \frac{u'(x)}{u(x)}$, donc la fonction H définie sur $\mathbb{R}$ par :

$\underline{\underline{H(x)}} = \ln(|u(x)|) = \ln(|e^x + 2e^{-x}|) = \underline{\underline{\ln(e^x + 2e^{-x})}}$

est une primitive de h sur $\mathbb{R}$.

2) $\forall x \in \mathbb{R}$, $k(x) = 2x(x^2+1)^4$. Posons $\begin{cases} u(x) = x^2 + 1 \\ u'(x) = 2x \end{cases}$.

donc $k(x) = u'(x) \times (u(x))^4$.

donc la fonction K définie sur $\mathbb{R}$ par : $K(x) = \frac{(u(x))^5}{5} + C = \frac{(x^2+1)^5}{5} + C$ où

C est une constante réelle est une primitive de k sur $\mathbb{R}$.

$K(2) = 0 \iff \frac{(2^2+1)^5}{5} + C = 0 \iff \frac{5^5}{5} + C = 0 \iff C = -\frac{5^5}{5} = -5^4 = -62$

donc $\boxed{K(x) = \frac{(x^2+1)^5}{5} - 625}$

Exercice III

1) (E) : $y'' - 2y' = 1$.

$Z = y'$, donc $Z' = y''$.

Ainsi (E) se réécrit avec Z et Z' en : $\boxed{Z' - 2Z = 1}$: (E')

(E') équivaut à $Z' = 2Z + 1$, de la forme $Z' = aZ + b$ avec : $a = 2$ et $b = 1$.

D'après le cours, les solutions de (E') sur $\mathbb{R}$ sont les fonctions définies par :

$$f(x) = ke^{ax} - \frac{b}{a} \quad \text{où } k \in \mathbb{R}.$$

$$\underline{f(x) = ke^{2x} - \frac{1}{2}}$$

2) Z est solution de (E') donc : $Z(x) = ke^{2x} - \frac{1}{2}$

Vu que $y' = Z$, on a : $y'(x) = ke^{2x} - \frac{1}{2}$

Donc $y(x) = \frac{ke^{2x}}{2} - \frac{1}{2}x + \lambda = \alpha e^{2x} - \frac{1}{2}x + \lambda$ avec $\alpha \in \mathbb{R}$, $\lambda \in \mathbb{R}$.

$\alpha = \frac{k}{2}$

$$\boxed{\mathcal{S}_{(E)} = \left\{ \begin{array}{l} \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ x \mapsto \alpha e^{2x} - \frac{1}{2}x + \lambda \,;\, (\alpha ; \lambda) \in \mathbb{R}^2 \end{array} \right\}}$$

Exercice IV

N est solution sur $[0;+\infty[$ de (E) : $y' = ay$ où $a \in \mathbb{R}$.

1a) $\boxed{N(t) = k e^{at} \text{ où } k \in \mathbb{R}}$.

1b) $N(0) = 10^9 \iff k e^0 = 10^9 \iff k = 10^9$ car $e^0 = 1$.

Donc $\boxed{N(t) = 10^9 e^{at}}$

1c) $N(18) = \frac{N(0)}{2} = \frac{10^9}{2} \iff 10^9 e^{18a} = \frac{10^9}{2} \iff e^{18a} = \frac{1}{2}$

$\iff \ln(e^{18a}) = \ln\left(\frac{1}{2}\right)$

$\iff 18a = -\ln(2)$

$\iff \boxed{a = \frac{-\ln(2)}{18}}$

Par suite, pour $t \geq 0$, on a : $\boxed{N(t) = 10^9 e^{-\frac{\ln(2)}{18} t}}$

$N'(t) = 10^9 \times \left(-\frac{\ln(2)}{18}\right) e^{-\frac{\ln(2)}{18} t}$ avec $10^9 > 0$; $-\ln(2) < 0$; $18 > 0$ et $e^{-\frac{\ln(2)}{18} t} > 0$.

Donc, $\underline{\forall t \in [0;+\infty[,\ N'(t) < 0}$: $\boxed{N \text{ est strictement décroissante sur }]0;+\infty[}$.

1d) $-\frac{\ln(2)}{18} < 0$, donc $\lim\limits_{t \to +\infty} -\frac{\ln(2)}{18} t = -\infty$, et $\lim\limits_{X \to -\infty} e^X = 0$, donc par <u>limite de fonctions composées</u>, $\lim\limits_{t \to +\infty} e^{-\frac{\ln(2)}{18} t} = 0$, et par <u>limite de produit</u>, $\boxed{\lim\limits_{t \to +\infty} N(t) = 0}$

A long terme, le corps ne contiendra plus de noyaux radioactifs.

Exercice V

Partie A

1. On a $f(\ln 5) = \dfrac{6}{1+5\,\mathrm{e}^{-\ln 5}}$.

   Or $\mathrm{e}^{-\ln 5} = \dfrac{1}{\mathrm{e}^{\ln 5}} = \dfrac{1}{5}$, donc $f(\ln 5) = \dfrac{6}{1+5\times\frac{1}{5}} = \dfrac{6}{2} = 3$. Donc A $(\ln 5\,;\,3) \in \mathscr{C}_f$.

2. On sait que $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \mathrm{e}^{-x} = 0$, donc $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} 1+5\,\mathrm{e}^{-x} = 1$ et $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} f(x) = 6$.

   Donc la droite d'équation $y = 6$ est asymptote horizontale à $\mathscr{C}_f$ en $+\infty$.

3. **a.** Pour tout réel : $f'(x) = -6\times\dfrac{(1+5\,\mathrm{e}^{-x})'}{(1+5\,\mathrm{e}^{-x})^2} = -\dfrac{6\times 5\times(-1)\,\mathrm{e}^{-x}}{(1+5\,\mathrm{e}^{-}x)^2} = \dfrac{30\,\mathrm{e}^{-x}}{(1+5\,\mathrm{e}^{-x})^2}$

   b. On sait que quel que soit $x\in\mathbb{R}$, $30\,\mathrm{e}^{-x} > 0$ et $(1+5\,\mathrm{e}^{-x})^2 > 0$; donc $f'(x) > 0$ su $\mathbb{R}$: la fonction f est croissante (strictement) sur $\mathbb{R}$..

   D'autre part $\displaystyle\lim_{x\to-\infty} \mathrm{e}^{-x} = +\infty$, donc $\displaystyle\lim_{x\to-\infty} 1+5\,\mathrm{e}^{-x} = +\infty$ et $\displaystyle\lim_{x\to-\infty} f(x) = 0$.

   Donc l'axe des abscisses est asymptote à la courbe $\mathscr{C}_f$ en $-\infty$.

   Enfin $f(0) = \dfrac{6}{1+5\times 1} = \dfrac{6}{6} = 1$: d'où le tableau de variation :

x	$-\infty$		0		$\ln 5$		$+\infty$
$f'(x)$		$+$		$+$		$+$	
$f(x)$	0	$\nearrow$	1	$\nearrow$	3	$\nearrow$	6

Partie B

L'objectif de cette partie est d'étudier l'équation différentielle : (E) $\qquad y' = y - \dfrac{1}{6}y^2$.

1. On a
$$f(x) - \frac{1}{6}[f(x)]^2 = \frac{6}{1+5\,\mathrm{e}^{-x}} - \frac{1}{6}\times\frac{36}{(1+5\,\mathrm{e}^{-x})^2}$$
$$= \frac{6}{1+5\,\mathrm{e}^{-x}} - \frac{6}{(1+5\,\mathrm{e}^{-x})^2} = \frac{6\,(1+5\,\mathrm{e}^{-x})-6}{(1+5\,\mathrm{e}^{-x})^2} = \frac{30\,\mathrm{e}^{-x}}{(1+5\,\mathrm{e}^{-x})^2} = f'(x)$$
   Donc f est bien une solution de l'équation (E).

2.
   - Les solutions de l'équation $y' = -y$ sont les fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par $x \longmapsto K\,\mathrm{e}^{-x}$ avec $K\in\mathbb{R}$;
   - La fonction constante $x \longmapsto \dfrac{1}{6}$ est la seule fonction constante solution de l'équation à résoudre ;

- Les fonctions solutions de l'équation différentielle proposée sont les fonctions définies par :

$$x \longmapsto \frac{1}{6} + K\,\mathrm{e}^{-x} \quad \text{avec } K \in \mathbb{R}.$$

3. **a.** On a donc : $h'(x) = -h(x) + \dfrac{1}{6}$

Or si $h(x) = \dfrac{1}{g(x)}$, alors $h'(x) = -\dfrac{g'(x)}{[g(x)]^2}$.

L'équation précédente devient :

$-\dfrac{g'(x)}{[g(x)]^2} = -\dfrac{1}{g(x)} + \dfrac{1}{6}$ soit en multipliant par $[g(x)]^2$

$-g'(x) = -g(x) + \dfrac{1}{6}[g(x)]^2 \iff g'(x) = g(x) - \dfrac{1}{6}[g(x)]^2$ ce qui signifie que la fonction g est une solution de l'équation différentielle $y' = y - \dfrac{1}{6}y^2$.

3b) Si g est solution de (E) sur $\mathbb{R}$ et que $\forall x \in \mathbb{R}$, $g(x) \neq 0$, alors $g'(x) = g(x) - \frac{1}{6}\left(g(x)\right)^2$.

Soit $h = \frac{1}{g}$, donc $g = \frac{1}{h}$ et $g' = \frac{-h'}{h^2}$.

Par suite, $\underline{\forall x \in \mathbb{R}}$, $\dfrac{-h'(x)}{h^2(x)} = \dfrac{1}{h(x)} - \dfrac{1}{6} \times \left(\dfrac{1}{h(x)}\right)^2$

$$-h'(x) = h^2(x)\left(\frac{1}{h(x)} - \frac{1}{6} \times \frac{1}{(h(x))^2}\right)$$

$$h'(x) = -h^2(x)\left(\frac{1}{h(x)} - \frac{1}{6} \times \frac{1}{(h(x))^2}\right)$$

$h'(x) = -h(x) + \frac{1}{6}$: ainsi $\underline{h \text{ est solution de : } y' = -y + \frac{1}{6}}$.

3c) Grâce à 3a) et 3b) : g sol. de (E) sur $\mathbb{R}$ équivaut à $\frac{1}{g}$ solution de $y' = -y + \frac{1}{6}$ sur $\mathbb{R}$

D'après la question 2), il existe $k \in \mathbb{R}$, $\forall x \in \mathbb{R}$, $\dfrac{1}{g(x)} = ke^{-x} + \dfrac{1}{6} = \dfrac{6ke^{-x}+1}{6}$.

⚠ On doit avoir : $\forall x \in \mathbb{R}$, $6ke^{-x}+1 \neq 0$: cela impose que $k \geqslant 0$.

En effet, si $k<0$, $e^{-x} = -\frac{1}{6k} > 0$ aurait une solution et donc g s'annulerait en $x = -\ln\left(-\frac{1}{6k}\right)$

Ainsi, $\exists k \in [0;+\infty[$, $\forall x \in \mathbb{R}$, $\dfrac{1}{g(x)} = \dfrac{6ke^{-x}+1}{6}$

$$g(x) = \frac{6}{6ke^{-x}+1} = \frac{6}{\lambda e^{-x}+1} \quad \text{avec } \lambda \geqslant 0.$$

$$g(x) = \frac{6}{\frac{\lambda}{e^x}+1} = \frac{6}{\frac{\lambda}{e^x}+\frac{e^x}{e^x}} = \frac{6e^x}{e^x+\lambda}$$

avec $\lambda \geqslant 0$.

$$\boxed{\mathcal{S}_{(E)} = \left\{ \begin{array}{l} \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ x \longmapsto \dfrac{6e^x}{e^x+\lambda} \end{array} ; \lambda \geqslant 0 \right\}.}$$

$\underline{\text{Rq}}$: la fonction de la partie $\boxed{A}$ est donc une solution de (E).