Exercice I

1) a) $\underbrace{\ln(x+1)}_{\text{existe ssi } x+1>0 \text{, car } \ln \text{ définie sur }]0;+\infty[} \leqslant 0 \iff \ln(x+1) \leqslant \ln(1) \iff \begin{cases} x+1 \leqslant 1 \\ \text{et} \\ x+1>0 \end{cases} \iff \begin{cases} x \leqslant 0. \\ \text{et} \\ x>-1. \end{cases}$ $\boxed{S =]-1;0]}$.

b) $4e^{3x-1} = 1 \iff e^{3x-1} = \frac{1}{4} \iff \ln(e^{3x-1}) = \ln\left(\frac{1}{4}\right) \iff 3x-1 = -\ln 4 \iff x = \frac{1-\ln 4}{3}$. $\boxed{S = \left\{\frac{1-\ln 4}{3}\right\}}$

c) $\dfrac{1}{2\times\left(\frac{1}{4}\right)^n+1} \geqslant 0{,}999 \iff \dfrac{1}{0{,}999} \geqslant 2\times\left(\frac{1}{4}\right)^n+1$ car $2\times\left(\frac{1}{4}\right)^n+1 > 0.$

$\iff 2\times\left(\frac{1}{4}\right)^n \leqslant \dfrac{1}{0{,}999}-1$

$\iff \left(\frac{1}{4}\right)^n \leqslant \frac{1}{2}\left(\dfrac{1}{0{,}999}-1\right)$ et $\dfrac{1}{0{,}999}-1 = \dfrac{1-0{,}999}{0{,}999} = \dfrac{0{,}001}{0{,}999} = \dfrac{1}{999}.$

$\iff \left(\frac{1}{4}\right)^n \leqslant \frac{1}{2}\times\frac{1}{999}$

$\iff \left(\frac{1}{4}\right)^n \leqslant \frac{1}{1998}$

$\iff \ln\left(\left(\frac{1}{4}\right)^n\right) \leqslant \ln\left(\frac{1}{1998}\right)$ car $\underline{\ln \text{ croît sur }]0;+\infty[}$

$\iff n\ln\left(\frac{1}{4}\right) \leqslant -\ln(1998)$

$\iff -n\ln(4) \leqslant -\ln(1998)$

$\iff n \geqslant \dfrac{-\ln(1998)}{-\ln(4)}$

$\iff n \geqslant \dfrac{\ln(1998)}{\ln(4)}.$ Or, $\dfrac{\ln(1998)}{\ln(4)} \simeq 5{,}48.$

c) $e^{2x}+e^{x}-12=0 \iff (e^{x})^2+e^{x}-12=0$

Posons $y=e^{x}$: l'équation proposée devient : $\underbrace{y^2+y-12=0}$. équation du 2nd degré en la variable y.

$a=1$; $b=1$; $c=-12$. $\Delta = 1^2-4\times1\times(-12)=49=7^2$.

Deux racines réelles car $\Delta>0$: $\begin{cases} y_1 = \dfrac{-1-7}{2}=-4 \\ y_2=\dfrac{-1+7}{2}=3 \end{cases}$

Retour à la variable x : $y=e^{x}$ et $y\in\{-4;3\}$ donc on résout :

$e^{x}=-4 \to$ Pas de solution réelle car $\forall x\in\mathbb{R}, e^{x}>0$.

$e^{x}=3 \iff \ln(e^{x})=\ln(3) \iff x=\ln(3)$

$\mathcal{S}=\{\ln(3)\}$.

α) $1-0{,}84^{n}>0{,}95 \iff 1-0{,}95>0{,}84^{n} \iff 0{,}84^{n}<0{,}05 \iff \ln(0{,}84^{n})<\ln(0{,}05)$ (croissance de ln sur $\mathbb{R}_+^*$)

$\iff n\ln(0{,}84)<\ln(0{,}05)$

$\iff n>\dfrac{\ln(0{,}05)}{\ln(0{,}84)}$ car $\ln(0{,}84)<0$ vu que $\forall x\in]0;1[, \ln(x)<0$

Or $\dfrac{\ln(0{,}05)}{\ln(0{,}84)}\approx 17{,}18$, donc $n_0=18$

β) $0{,}34^{n}<10^{-6} \iff \ln(0{,}34^{n})<\ln(10^{-6}) \iff n\ln(0{,}34)<-6\ln(10)$

$\iff n>\dfrac{-6\ln(10)}{\ln(0{,}34)}$ avec $\dfrac{-6\ln(10)}{\ln(0{,}34)}\approx 12{,}81$

$\iff n\geqslant 13$

Donc ici $n_0=13$.

2) $g(t)=10^6\times e^{0{,}25t}$

a) $g(0)=10^6\times e^{0{,}25\times0}=10^6$: population initiale.

b) On cherche $t\in[0;+\infty[$ tel que $g(t)=2g(0)=2\times10^6$.

$g(t)=2\times10^6 \iff 10^6\times e^{0{,}25t}=2\times10^6 \iff e^{0{,}25t}=2 \iff \ln(e^{0{,}25t})=\ln(2)$

$g(t)=2\times10^6 \iff 0{,}25t=\ln(2) \iff t=\dfrac{\ln(2)}{0{,}25}=\dfrac{\ln(2)}{\frac14}=4\ln(2)$. $S=\{4\ln(2)\}$

$t\simeq 2{,}77$ h.

Pour que $g(t)=10\,g(0)$, on résout : $10^6\times e^{0{,}25t}=10\times10^6 \iff e^{0{,}25t}=10 \iff \ln(e^{0{,}25t})=\ln(10)$

$\iff 0{,}25t=\ln(10) \iff t=\dfrac{\ln(10)}{0{,}25}$.

$S=\{4\ln(10)\}$. $t=4\ln(10)$ $t\simeq 9{,}21$ h.

Exercice II

1. f_a est une somme de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$ donc dérivable sur $\mathbb{R}$ et on a :
$\forall x \in \mathbb{R}$, $f_a'(x) = e^{x-a} - 2$
$f_a'(x) > 0 \iff e^{x-a} - 2 > 0 \iff e^{x-a} > 2 \iff x - a > \ln 2 \iff x > a + \ln 2$
$f_a'(x)$ s'annule et change de signe pour $x = a + \ln 2$ en étant négatif puis positif donc f_a admet un minimum en $a + \ln 2$ égal à
$f_a(a + \ln 2) = e^{a+\ln 2 - a} - 2(a + \ln 2) + e^a = 2 - 2a - 2\ln 2 + e^a$.

x	$-\infty$		$a+\ln 2$		$+\infty$
$f_a'(x)$		$-$	0	$+$	
f_a		$\searrow$	$f_a(a+\ln 2)$	$\nearrow$	

2. En $a + \ln 2$, on a $f_a(a + \ln 2) = 2 - 2a - 2\ln 2 + e^a$.
Afin de minimiser ce minimum, on étudie les variations de la fonction φ dérivable sur $\mathbb{R}$ et définie par $\varphi(a) = 2 - 2a - 2\ln 2 + e^a$.
$\varphi'(a) = -2 + e^a$;
   - $-2 + e^a > 0 \iff e^a > 2 \iff a > \ln 2$;
   - $-2 + e^a < 0 \iff e^a < 2 \iff a < \ln 2$;

   $\varphi'(a)$ s'annule et passe de négatif à positif en $a = \ln 2$.

x	$-\infty$		$\ln 2$		$+\infty$
$\varphi'(x)$		$-$	0	$+$	
φ		$\searrow$	$4-4\ln 2$	$\nearrow$	

Prendre $a = \ln 2$, minimise donc le minimum de f_a qui est égal à
$\varphi(\ln 2) = 2 - 2\ln 2 - 2\ln 2 + e^{\ln 2} = 4 - 4\ln 2$.

Exercice III

42 **a)** $\theta(t) = 12{,}5$ équivaut à $25 - 10e^{0,1t} = 12{,}5$ c'est-à-dire $e^{0,1t} = 1{,}25$ soit $0{,}1t = \ln(1{,}25)$.
Donc $t = \dfrac{\ln(1{,}25)}{0{,}1}$ et $t \approx 2{,}2$.
La température atteindra 12,5 °C au bout d'environ 2,2 minutes.
b) $\theta(t) = 0$ équivaut à $25 - 10e^{0,1t} = 0$ c'est-à-dire $e^{0,1t} = 2{,}5$ soit $0{,}1t = \ln(2{,}5)$.

Donc $t = \dfrac{\ln(2,5)}{0,1}$ et $t \approx 9,2$.

La température atteindra 0°C au bout d'environ 9,2 minutes.

52 **a)** Les abscisses de chacun des points d'intersection de la courbe avec l'axe des abscisses vérifient l'équation $f(x) = 0$ c'est-à-dire $(\ln(x) - 1)(3 - \ln(x)) = 0$ soit $x = \mathrm{e}$ ou $x = \mathrm{e}^3$.

Les abscisses de chacun des points d'intersection de la courbe avec l'axe des abscisses sont e et e^3.

b) On peut dresser ce tableau de signes.

x	0		e		e^3		$+\infty$
$\ln(x) - 1$	‖	$-$	0	$+$		$+$	
$3 - \ln(x)$	‖	$+$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	‖	$-$	0	$+$	0	$-$	

f est négative sur $]0\,;\mathrm{e}] \cup]\mathrm{e}^3\,;+\infty[$.

f est positive sur $]\mathrm{e}\,;\mathrm{e}^3[$.

64*b*)

b) On résout l'équation dans l'ensemble E des nombres réels x tels que $2x - 3 > 0$, $x + 1 > 0$ et $x - 3 > 0$ c'est-à-dire $x > \dfrac{3}{2}$, $x > -1$ et $x > 3$ donc $\mathrm{E} =]3\,;+\infty[$.

Pour tout réel x de E, $\ln(2x - 3) - 2\ln(x + 1) = \ln(x - 3)$ s'écrit aussi $\ln(2x - 3) = \ln((x + 1)^2) + \ln(x - 3)$ soit $\ln(2x - 3) = \ln((x + 1)^2(x - 3))$.

Ce qui équivaut à $2x - 3 = (x + 1)^2(x - 3)$ soit $2x - 3 = (x^2 + 2x + 1)(x - 3)$ c'est-à-dire $x^3 - x^2 - 7x = 0$.

$x^3 - x^2 - 7x = 0$ équivaut à $x(x^2 - x - 7) = 0$ soit $x = 0$, $x = \dfrac{1 + \sqrt{29}}{2}$ ou $x = \dfrac{1 - \sqrt{29}}{2}$.

Seul $\dfrac{1 + \sqrt{29}}{2}$ appartient à E.

Donc $\mathrm{S} = \left\{\dfrac{1 + \sqrt{29}}{2}\right\}$.

Exercice IV

1. **a.** $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} f(x) = \lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \left[5x^2+2x-2x^2\ln(x)\right]$

$$\left.\begin{array}{r} \lim\limits_{x\to 0}\left(5x^2+2x\right)=0 \\ \text{Par croissance comparée } \lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} x^2\ln(x)=0 \end{array}\right\} \overset{\text{par somme}}{\Longrightarrow} \lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \left[5x^2+2x-2x^2\ln(x)\right]=0$$

$$\boxed{\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} f(x)=0}$$

b. $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} \left[5x^2+2x-2x^2\ln(x)\right] = \lim\limits_{x\to+\infty} x^2\left[5+\dfrac{2}{x}-2\ln(x)\right]$

$$\left.\begin{array}{r} \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{2}{x}=0 \Longrightarrow \lim\limits_{x\to+\infty}\left(5+\dfrac{2}{x}\right)=5 \\ \lim\limits_{x\to+\infty} \ln(x)=+\infty \Longrightarrow \lim\limits_{x\to+\infty} -2\ln(x)=-\infty \end{array}\right\} \overset{\text{par somme}}{\Longrightarrow} \lim\limits_{x\to+\infty}\left[5+\dfrac{2}{x}-2\ln(x)\right]=-\infty$$

$$\left.\begin{array}{r} \lim\limits_{x\to+\infty} x^2=+\infty \\ \lim\limits_{x\to+\infty}\left[5+\dfrac{2}{x}-2\ln(x)\right]=-\infty \end{array}\right\} \overset{\text{par produit}}{\Longrightarrow} \lim\limits_{x\to+\infty} x^2\left[5+\dfrac{2}{x}-2\ln(x)\right]=-\infty$$

$$\boxed{\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=-\infty}$$

2.

$$\begin{aligned} f'(x) &= 5\times 2x+2-2\left[2x\times\ln(x)+x^2\times\frac{1}{x}\right] = 10x+2-2\left[2x\ln(x)+x\right] = 10x+2-4x\ln(x)-2x\\ &= \boxed{8x+2-4x\ln(x)} \end{aligned}$$

3. **a.**

$$f''(x) = 8-4\left[1\times\ln(x)+x\times\frac{1}{x}\right] = 8-4\ln(x)-4 = 4-4\ln(x) = \boxed{4\left[1-\ln(x)\right]}$$

b. La courbe $\mathscr{C}_f$ est au-dessus de ses tangentes si, et seulement si, f est convexe, ce qui équivaut à $f''(x)$ est positif.

$f''(x)\geqslant 0 \iff 4\left[1-\ln(x)\right]\geqslant 0 \iff 1-\ln(x)\geqslant 0 \iff -\ln(x)\geqslant -1 \iff \ln(x)\leqslant 1 \iff x\leqslant \mathrm{e}$ (car la fonction ln est strictement croissante sur $]0\,;\,+\infty[$).

La courbe $\mathscr{C}_f$ est donc au-dessus de ses tangentes sur l'intervalle $]0\,;\,\mathrm{e}]$.

c.

x	0		e		$+\infty$
Signe de $f''(x)$	‖	$+$	0	$-$	
Variations de f'	‖ 2	↗	$4\mathrm{e}+2$	↘	$-\infty$

$$f'(\mathrm{e}) = 8\mathrm{e}+2-4\mathrm{e}\ln(\mathrm{e}) = 8\mathrm{e}+2-4\mathrm{e} = 4\mathrm{e}+2$$

4. **a.** Sur $]0\,;\,\mathrm{e}]$, la fonction f' est strictement croissante avec $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} f'(x) = 2$, donc pour tout $x\in\,]0\,;\,\mathrm{e}]$,on a $f'(x)>0$.

Sur $[\mathrm{e}\,;\,+_{i}nfty[$, la fonction f' est continue (puisque dérivable) et strictement décroissante. De plus, $f(_{t}exte) = 4\mathrm{e}+2>0$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} f'(x) = -\infty$. $0\in\,]-\infty\,;\,4\mathrm{e}+2[$, donc, d'après le corollaire du théorème des valeurs intermédiaires, l'équation $f'(x)=0$ admet une solution unique α sur $[\mathrm{e}\,;\,+\infty[$.

Au final, l'équation $f'(x)=0$ admet une solution unique α sur $]0\,;\,+\infty[$.

On a :

$$\boxed{7{,}87<\alpha<7{,}88}$$

b. On sait que sur $]0\,;\,\mathrm{e}]$ on a $f'(x) > 0$. Puisque f' est décroissante sur $[\mathrm{e}\,;\,+\infty[$ et qu'elle s'annule en α, $f'(x) \geqslant 0$ sur $[\mathrm{e}\,;\,\alpha]$ et $f'(x) \leqslant 0$ sur $[\alpha\,;\,+\infty[$. Donc $f'(x)$ est positif sur $]0\,;\,\alpha]$ et négatif sur $[\alpha\,;\,+\infty[$.

x	0		α		$+\infty$
Signe de $f'(x)$	‖	$+$	0	$-$	
Variations de f	‖ 0	$\nearrow$	$f(\alpha)$	$\searrow$	$-\infty$

5. On a $f''(\alpha) = 8\alpha + 2 - 4\alpha\ln(\alpha)$, donc :

$$\begin{aligned} f'(\alpha) = 0 &\iff 8\alpha + 2 - 4\alpha\ln(\alpha) = 0 \\ &\iff 4\alpha\ln(\alpha) = 8\alpha + 2 \\ &\iff \ln(\alpha) = \frac{2(4\alpha+1)}{4\alpha} \qquad (\alpha \neq 0) \\ &\iff \boxed{\ln(\alpha) = \frac{4\alpha+1}{2\alpha}} \end{aligned}$$

Exercice V

Partie A $x \in [0\,;+\infty[$ et $f(x) = 5\ln(x+3) - x$.

1) $f(x) = 5\ln(u(x)) - x$ avec : $u(x) = x+3$ et $u'(x) = 1$

a) $f'(x) = 5 \times \frac{u'(x)}{u(x)} - 1 = 5 \times \frac{1}{x+3} - 1 = \frac{5}{x+3} - 1 = \frac{5}{x+3} - \frac{(x+3)}{x+3} = \frac{5-(x+3)}{x+3} = \frac{5-x-3}{x+3} = \frac{-x+2}{x+3}$.

Or $x \geq 0$, donc $x+3 \geq 3 > 0$, donc $f'(x)$ a le même signe que : $-x+2$.

Par suite, $f'(x) \geq 0 \iff -x+2 \geq 0 \iff 2 \geq x$.

→ Voici d'après le Théorème de Lagrange :

b)

x	0		2		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	$5\ln(3)$	$\nearrow$	$5\ln(5)-2$	$\searrow$	$-\infty$

→ cf q. d) !

$f(2) = 5\ln(5) - 2$

c) $f(x) = 5\ln(x+3) - x \overset{\text{pour } x>0}{=} x\left(\frac{5\ln(x+3)}{x} - 1\right)$

$f(x) = x\left(\frac{5\ln(x(1+\frac{3}{x}))}{x} - 1\right) = x\left(\frac{5\ln(x) + 5\ln(1+\frac{3}{x})}{x} - 1\right)$.

$f(x) = x\left(\frac{5\ln(x)}{x} - 1\right) + \frac{x \times 5\ln(1+\frac{3}{x})}{x}$

Pour $x>0$: $\boxed{f(x) = x\left(\frac{5\ln(x)}{x} - 1\right) + 5\ln\left(1+\frac{3}{x}\right)}$

d) On sait que $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{\ln(x)}{x} = 0$ (limite de référence), donc $\begin{cases} \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{5\ln(x)}{x} - 1 = -1 \\ \lim\limits_{x\to+\infty} x = +\infty \end{cases}$, donc par limite de produit, $\lim\limits_{x\to+\infty} x\left(\frac{5\ln(x)}{x} - 1\right) = -\infty$

De plus, $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(1+\frac{3}{x}\right) = 1$ et $\lim\limits_{X\to1} \ln(X) = 0$, donc par limite de composée et de produit :

$\lim\limits_{x\to+\infty} 5\ln\left(1+\frac{3}{x}\right) = 0$.

Par suite, par limite de somme, $\boxed{\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = -\infty}$ cf c).

2a) $5\ln(3) \simeq 5,49$, donc $5\ln(3) > 0$

f croît sur $[0\,;2]$, et $f(0) > 0$, donc $f(x) > 0$ sur $[0\,;2]$, donc sur cet intervalle, l'équation

$f(x)=0$ n'a pas de solution sur $[0;2]$.

Sur $[2;+\infty[$:
(*) f est continue car dérivable.
(**) f est strictement décroissante sur $[2;+\infty[$.
(***) $f(2)=5\ln(5)-2$ ($\simeq 6{,}047$) donc $f(2)>0$.
Par suite, $0 \in \,]-\infty; 5\ln(5)-2]$.

Donc d'après le corollaire du théorème des valeurs intermédiaires, l'équation $f(x)=0$ admet une unique solution notée α avec $\alpha \in [2;+\infty[$.

Par suite, $f(x)=0$ a pour unique solution α, avec $\alpha \in [0;+\infty[$.

2b) $f(14) \simeq 0{,}166$, donc $f(14)>0$
$f(15) \simeq -0{,}548$, donc $f(15)<0$ / Par suite, $14 \leq \alpha \leq 15$.

Grâce à ma calculatrice et à la méthode de balayages on obtient :

Pas égal à 0,1 :

x	$f(x)$
14,2	0,0245
14,3	−0,046

Pas égal à 0,01

x	$f(x)$
14,23	0,0033
14,24	−0,004

Donc : $14{,}23 < \alpha < 14{,}24$ donc $\alpha \simeq 14{,}2$ à 10^{-1} près.

c)

x	0		α		$+\infty$
$f(x)$		$+$	0	$-$	

$f(\alpha)=0$ et f décroît sur $[\alpha;+\infty[$
donc $f(x)\leq 0$ si $x\in[\alpha;+\infty[$.

Partie B
1a) cf. annexe.
1b) Il semblerait que la suite (u_n) soit croissante.

2a) $g(x)=5\ln(x+3)$.
$g'(x)=\frac{5}{x+3}$ (cf. A.1) donc pour tout réel $x\geq 0$, $\frac{5}{x+3}>0$, donc $g'(x)>0$ sur $[0;+\infty[$.
D'après le th. de Lagrange, g est strictement croissante sur $[0;+\infty[$.

2b) On sait que $f(\alpha)=0$ donc que : $5\ln(\alpha+3)-\alpha=0$ donc que $5\ln(\alpha+3)=\alpha$, donc que $g(\alpha)=\alpha$.

2c) Soit $\mathcal{P}(n)$ la propriété : $0 \leq u_n \leq \alpha$.

Initialisation : Pour $n=0$: $u_0 = 4$ et $0 \leq 4 \leq \alpha$ est vraie, car $14 < \alpha < 15$!
donc $\mathcal{P}(0)$ est vraie.

Hérédité : Soit n un entier naturel (fixé) tel que : $\mathcal{P}(n)$ est vraie i.e $0 \leq u_n \leq \alpha$.

Montrons que $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie : On par hypothèse de récurrence, $0 \leq u_n \leq \alpha$ et $u_{n+1} = g(u_n)$
donc comme g croît sur $[0;\alpha]$ on a : $g(0) \leq g(u_n) \leq g(\alpha)$.

donc : $5\ln(3) \leq u_{n+1} \leq \underbrace{}_{\alpha}$ par B.2b.

Or $5\ln(3) \geq 0$, donc on a bien : $0 \leq u_{n+1} \leq \alpha$, donc $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie.

Conclusion : $\mathcal{P}(0)$ est vraie, et $\forall n \in \mathbb{N}$, $\mathcal{P}(n)$ est héréditaire.
donc d'après le principe de récurrence, $\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ 0 \leq u_n \leq \alpha}$

2d) $\forall n \in \mathbb{N}$, $\boxed{u_{n+1} - u_n} = g(u_n) - u_n = \boxed{f(u_n)}$ car $g(x) = f(x) - x$.
Or, $\forall n \in \mathbb{N}$, $0 \leq u_n \leq \alpha$ (par 2b), et f ~~[illegible]~~ à valeurs positives sur $[0;\alpha]$ d'après A-2-c.
Donc $f(u_n) \geq 0$ et par suite, $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} - u_n \geq 0$: donc (u_n) croît et la conjecture du B1b) est ainsi validée.

2e) (u_n) croît et est majorée par α d'après B-2-c), donc (u_n) converge.
Soit $\ell = \lim\limits_{n \to +\infty} u_n$: le passage à la limite ds : $u_{n+1} = g(u_n)$ conduit à : $\ell = g(\ell)$

$\iff g(\ell) - \ell = 0$

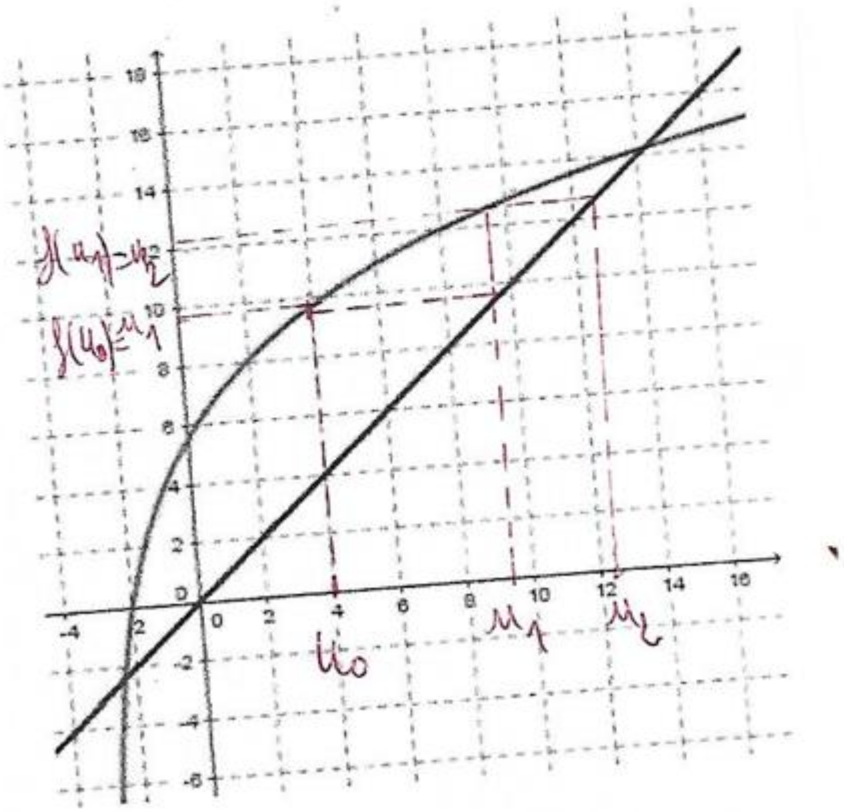
Grâce à A-2a), on en déduit que $\ell = \alpha$ car $f(x) = 0$ a pour unique solution α sur $[0;+\infty[$. $\iff f(\ell) = 0$.

3) 0) Cet algorithme permet de déterminer, (s'il existe) le plus petit réel u tel que $g(u) \geq 14,2$.

a) Cet algo. est associé à la suite (u_n). Or (u_n) converge en croissant vers α avec $14,23 < \alpha < 14,24$:
donc il existe un rang N à partir duquel : $n \geq N \Rightarrow u_n \geq 14,2$, donc l'algo. se termine à coup sûr.
(Le fait que (u_n) croisse assure l'existence d'un plus petit entier $N \in \mathbb{N}$ tel que $u_n \geq 14,2$ si $N \leq n$.

b) Grâce à une calculatrice : on trouve en sortie : $\boxed{u \simeq 14,22315}$

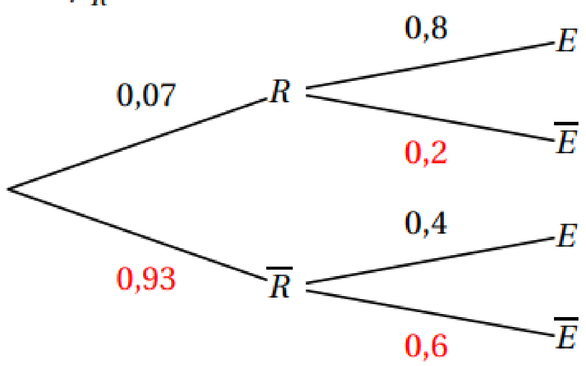
Annexe 1



Exercice VI

Partie A

1. On dresse l'arbre pondéré de probabilités en utilisant les données de l'énoncé :
   $p(R) = 0,07$; $p_R(E) = 0,8$ et $p_{\overline{R}}(E) = 0,4$:



   On a $p(R \cap E) = p(R) \times p_R(E) = 0,07 \times 0,8 = 0,056$.

2. D'après la loi des probabilités totales :
   $p(E) = p(R \cap E) + p\left(\overline{R} \cap E\right)$.
   Or $p\left(\overline{R} \cap E\right) = p\left(\overline{R}\right) \times p_{\overline{R}}(E) = 0,93 \times 0,4 = 0,372$.
   Donc $p(E) = 0,056 + 0,372 = 0,428$.

3. On a $p_E(R) = \dfrac{p(E \cap R)}{p(E)} = \dfrac{p(R \cap E)}{p(E)} = \dfrac{0,056}{0,428} = \dfrac{56}{428} = \dfrac{14}{107} \approx 0,1308$ soit 0,131 au millième près.

Partie B

1. Les évènements étant indépendants et la probabilité d'obtenir un objet rare étant toujours égale à 0,07, la variable aléatoire X suit une loi binomiale $\mathcal{B}(n, p)$ avec $n = 30$ et $p = 0,07$.
   L'espérance mathématique est $E = n \times p = 30 \times 0,07 = 2,1$.
2. La calculatrice donne $P(X < 6) \approx 0,9838$ soit 0,984 au millième près.
3. Quel que soit $k \in \mathbb{N}$, $\quad p(X \geqslant k+1) = 1 - p(X \leqslant k)$. D'après la calculatrice :
   $p(X \geqslant 1+1) = 1 - p(X \leqslant 1) \approx 0,631$, et $p(X \geqslant 2+1) = 1 - p(X \leqslant 2) \approx 0,351$, on a donc $k = 2$.
   Dans le cadre du jeu ceci signifie que la probabilité d'obtenir au moins 2 objets rares est supérieure à $\dfrac{1}{2}$.
4. Soit Y la variable correspondant au nombre d'objets rares que le joueur obtient après avoir remporté N défis Il faut donc trouver Y tel que $p(Y \geqslant 1) \geqslant 0,95$ ou encore $1 - p(X = 0) \geqslant 0,95 \iff p(X = 0) \leqslant 1 - 0,95 \iff p(X = 0) \leqslant 0,05$.
   Or $p(X = 0) = \binom{N}{0} \times 0,07^0 \times (1 - 0,07)^N = 0,93^N$.
   Il faut donc résoudre l'inéquation :
   $0,93^N \leqslant 0,05 \Rightarrow N \ln 0,93 \leqslant \ln 0,05$ par croissance de la fonction logarithme népérien et enfin $N \geqslant \dfrac{\ln 0,05}{\ln 0,93}$, car $\ln 0,93 < 0$ et son inverse $\dfrac{1}{\ln 0,93}$ aussi.
   D'après la calculatrice $\dfrac{\ln 0,05}{\ln 0,93} \approx 41,3$.
   Conclusion : il faut que $N \geqslant 42$. À partir de 42 succès la probabilité d'obtenir un objet rare est supérieure ou égale à 0,95.