Exercice I

$f(x) = \frac{x-9}{2x+4}$

1) f(x) est calculable si 2x +4 $\neq$0.

Or 2x +4 = 0 équivaut à 2x = -4 c'est-à-dire à x = -2.

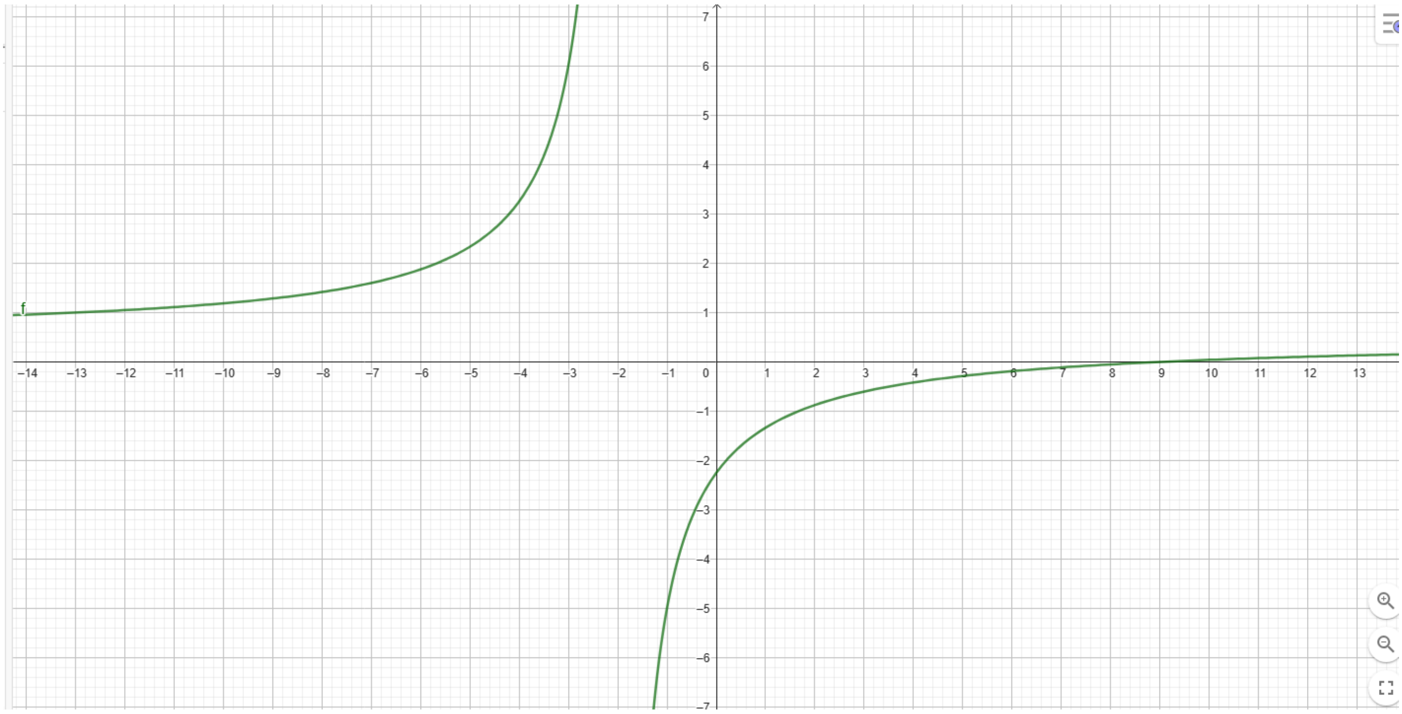
Ainsi, -2 est la valeur interdite pour f, de sorte que $D_f = \mathbb{R}$-{-2}=]-∞ ;-2[∪$]-2;+\infty[$.

2) f (0)=$\frac{-9}{4}$ et f (1)= $\frac{1-9}{2+4}$=$\frac{-8}{6} = \frac{-4}{3}$.

3) Résolvons $f(x) = 3$ c'est-à-dire : $\frac{x-9}{2x+4} = 3$, ce qui par produits en croix conduit à : $x-9 = 3(2x+4)$ et $x\neq-2$, donc $x - 9 = 6x + 12$ et $x\neq-2$, donc $5x = -21$ et $x = \frac{-21}{5}$: l'antécédent de 3 par f est donc égal à $\frac{-21}{5}$.

4) $f(2) = \frac{-7}{8}$, or $\frac{-7}{8}$ est différent de l'ordonnée du point A (égale à -1), donc A(2 ; -1) n'appartient pas à la courbe de f.

De même $f(-1) = \frac{-10}{2}$=-5 qui est égal à l'ordonnée du point B, donc B(-1 ; -5) appartient à la courbe représentant f.



Question facultative

$\boxed{\dfrac{x-9}{2x+4} \geqslant -3}$ équivaut à : $\dfrac{x-9}{2x+4} + 3 \geqslant 0$, $\dfrac{x-9}{2x+4} + \dfrac{3(2x+4)}{2x+4} \geqslant 0$

$\dfrac{x-9+3(2x+4)}{2x+4} \geqslant 0$, $\dfrac{x-9+6x+12}{2x+4} \geqslant 0$, $\boxed{\dfrac{7x+3}{2x+4} \geqslant 0}$.

OR : $7x+3 \geqslant 0$ équivaut à $x \geqslant -\frac{3}{7}$

$2x+4 \geqslant 0$ équivaut à $x \geqslant -2$.

D'où le tableau de signes :

x	$-\infty$		-2		$-\frac{3}{7}$		$+\infty$
Signe de $7x+3$		$-$		$-$	0	$+$	
Signe de $2x+4$		$-$	0	$+$		$+$	
Signe de $\dfrac{7x+3}{2x+4}$		$+$	‖	$-$	0	$+$	

Ainsi, $\dfrac{7x+3}{2x+4} \geqslant 0$ équivaut à : $x < -2$ ou $x \geqslant -\frac{3}{7}$:

$$S =]-\infty ; -2[\cup [-\tfrac{3}{7} ; +\infty[.$$

Exercice II

a) $f(x) = x^4$: f est définie sur $\mathbb{R}$, vu qu'on peut élever à la puissance 4 n'importe quel réel : $D_f = \mathbb{R}$.

b) $h(x) = \frac{1}{x} + \sqrt{x^2+1}$: $\frac{1}{x}$ est calculable pour tout réel x non nul (pas de division par 0).

De plus, pour tout réel x, $x^2 \geqslant 0$, donc $x^2+1 \geqslant 1$, donc x^2+1 n'est jamais négatif, et à ce titre on peut calculer pour n'importe quel réel x la quantité $\sqrt{x^2+1}$.

Ainsi, $D_h = \mathbb{R} - \{0\}$.

c) $g(x) = \sqrt{\dfrac{-4x+1}{x+1}}$ est calculable si et seulement si : $\dfrac{-4x+1}{x+1} \geq 0$ et $x+1 \neq 0$.

Faisons un tableau de signe de l'expression $\dfrac{-4x+1}{x+1}$:

$-4x+1 \geq 0$ équivaut à $1 \geq 4x$ c'est à dire $x \leq \frac{1}{4}$. Et $x+1 \geq 0$ équivaut à $x \geq -1$.

D'où :

x	$-\infty$		-1		$\frac{1}{4}$		$+\infty$
Signe de $-4x+1$		$+$	|	$+$	0	$-$	
Signe de $x+1$		$-$	0	$+$	|	$+$	
Signe de $\sqrt{\frac{-4x+1}{x+1}}$		$-$	||	$+$	0	$-$	

Donc $\dfrac{-4x+1}{x+1} \geq 0$ équivaut à : $-1 < x \leq \frac{1}{4}$.

Donc $\boxed{D_g = \left]-1 ; \frac{1}{4}\right]}$

<u>Exercice III</u> : page ci-après.

<u>BONUS</u>

On résout d'abord f(X) = 0 qui conduit à : X = -4 ou X = -2 ou X = 2 ou X = 4.

On cherche ensuite les éventuels antécédents de ces quatre nombres -4 ; -2 ; 2 et 4 par f.

-4 n'a pas d'antécédents par f ; -2 a deux antécédents par f ; 2 a quatre antécédents par f et 4 a deux antécédents par f. Donc au total, l'équation : f(f(x)) = 0 admet : 0 + 2 + 4 +2 = 8 solutions.

Exercice III

$f(5) = -1$

) $g(-2) = 2$

) -3 et environ $7,5$ sont les antécédents de 3 par f.

) 5 a un seul antécédent par g.

$f(x) = 1$ a pour solutions : $x = 0$ et $x \approx 6,5$.

$g(x) = -5$ n'a aucune solution : $S = \emptyset$.

) $f(x) = g(x)$ équivaut à : $x = -3$ ou $x = 1$ ou $x = 6$: $S = \{-3 ; 1 ; 6\}$.

) $f(x) > g(x)$ équivaut à : $-3 < x < 1$ ou $6 < x \leq 10$: $S =]-3 ; 1[\cup]6 ; 10]$.

) $g(x) \leq 1$ a pour solutions : $[-1 ; 7,9]$.

) Si $x \in [-7 ; 10]$, alors $f(x) \in [-1,8 ; 10]$.

) Si $m < -1,9$, $f(x) = m$ n'a aucune solution.

Si $m = -1,9$, $f(x) = m$ a une unique solution.

Si $-1,9 < m \leq 3,8$, alors $f(x) = m$ a deux solutions

Si $3,8 < m \leq 10$, alors $f(x) = m$ a une unique solution.

Si $m > 10$, alors $f(x) = m$ n'a aucune solution.

)

x	-7		1		6		10
signe de $f(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

x	-7		1		6		10
signe de $g(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	