Seconde **Corrigé du DM7** **Décembre 2024**

Exercice I

I – 1) $-3 < a \leqslant 5$, donc $-3+7 < a+7 \leqslant 5+7$, c'est-à-dire : $\underline{4 < a+7 \leqslant 12}$.

2) $-3 < a \leqslant 5$, donc $-3-5{,}2 < a-5{,}2 \leqslant 5-5{,}2$, c'est-à-dire : $\underline{-8{,}2 < a-5{,}2 \leqslant -0{,}2}$

3) $-3 < a \leqslant 5$, donc $-3\times 4 < 4a \leqslant 4\times 5$ car $4>0$, c'est-à-dire : $\underline{-12 < 4a \leqslant 20}$.

4) $-3 < a \leqslant 5$, donc $-6 < 2a \leqslant 10$ (car $2>0$), donc $\underline{-14 < 2a-8 \leqslant 2}$

5) $-3 < a \leqslant 5$ donc $-3\times(-4) > -4a \geqslant 5\times(-4)$ car $-4<0$, donc $12 > -4a \geqslant -20$

Donc $\underline{13 > -4a+1 \geqslant -19}$

6) $-3 < a \leqslant 5$, donc $-6 < a-3 \leqslant 2$, donc $\underline{\dfrac{-6}{7} < \dfrac{a-3}{7} \leqslant \dfrac{2}{7}}$ car $7>0$.

II – $A > B > C > 0$: donc $\dfrac{A}{B} > \dfrac{B}{B} > \dfrac{C}{B}$ $\underline{\text{car } B>0}$

donc $\dfrac{A}{B} > 1 > \dfrac{C}{B}$: Ainsi, $\boxed{\dfrac{A}{B} > 1 \text{ et } \dfrac{C}{B} < 1}$

III –

a) $1{,}4 \leqslant x \leqslant 3{,}2$
$-1 \leqslant y \leqslant 2$

donc $1{,}4+(-1) \leqslant x+y \leqslant 3{,}2+2$

$\boxed{0{,}4 \leqslant x+y \leqslant 5{,}2}$

b) $1{,}4 \leqslant x \leqslant 3{,}2$, donc $2{,}8 \leqslant 2x \leqslant 6{,}4$ car $2>0$

$-1 \leqslant y \leqslant 2$, donc $\underline{-3 \leqslant 3y \leqslant 6}$ car $3>0$.

Donc : $2{,}8+(-3) \leqslant 2x+3y \leqslant 6{,}4+6$

$\boxed{-0{,}2 \leqslant 2x+3y \leqslant 12{,}4}$

c) $1{,}4 \leqslant x \leqslant 3{,}2$: $x-y = x+(-y)$ ⚠ Pas de soustraction d'inégalités !

$-1 \leqslant y \leqslant 2$ donc $-1\times(-1) \geqslant -1\times y \geqslant -1\times 2$, donc $-2 \leqslant -y \leqslant 1$.

Ainsi : $1{,}4 \leqslant x \leqslant 3{,}2$
$-2 \leqslant -y \leqslant 1$

$1{,}4+(-2) \leqslant x+(-y) \leqslant 3{,}2+1$

$\boxed{-0{,}6 \leqslant x-y \leqslant 4{,}2}$

d) $1{,}4 \leqslant x \leqslant 3{,}2$, donc $2{,}8 \leqslant x \leqslant 6{,}4$ (car $2>0$).

$-1 \leqslant y \leqslant 2$, donc $5 \geqslant -5y \geqslant -10$ (car $-5<0$).

Ainsi : $2{,}8 \leqslant x \leqslant 6{,}4$
$-10 \leqslant -5y \leqslant 5$

$2{,}8+(-10) \leqslant x+(-5y) \leqslant 6{,}4+5$

$\boxed{-7{,}2 \leqslant x-5y \leqslant 11{,}4}$

Exercice II

Exercice I

1) $2x-7 > 6-(2x-8)$

$2x-7 > 6-2x+8$

$2x+2x > 6+8+7$

$4x > 21$

$x > \frac{21}{4}$ car $4>0$

$S = \left]\frac{21}{4};+\infty\right[$

$4x-2(6+2x) \leqslant 4-2(x-11)$

$4x-12-4x < 4-2x+22$

$-12 < -2x+26$

$2x < 26+12$

$2x < 38$

$x < \frac{38}{2}$ car $2>0$

$x < 19$

$S = \left]-\infty;19\right[$.

2) $1-a < 2a+5 < 9-a$ équivaut à :

$1-a < 2a+5$ et $2a+5 < 9-a$.

$1-5 < 2a+a$ et $2a+a < 9-5$

$3a > -4$ et $3a < 4$

$a > -\frac{4}{3}$ et $a < \frac{4}{3}$

$S = \left]-\frac{4}{3};\frac{4}{3}\right[$, donc

$S_{\mathbb{Z}} = \{-1;0;1\}$ car $a \in \mathbb{Z}$

3) $mx-2 > x+m \iff mx-x > m+2 \iff x(m-1) > m+2$

Distinguons 3 cas : *) Si $m-1>0$, c'est à dire si $m>1$ alors $x(m-1)>m+2$ équivaut à $x > \frac{m+2}{m-1}$ car $m-1>0$.

$\boxed{\text{Si } m>1, \text{ alors } S = \left]\frac{m+2}{m-1};+\infty\right[.}$

**) Si $m=1$: $x(m-1)>m+2$ s'écrit : $x\times 0 > 3$, c'est à dire $0>3$: absurde.

$\boxed{\text{Si } m=1, \text{ alors } S=\emptyset}$

***) Si $m-1<0$, c'est à dire si $m<1$, alors $x(m-1)>m+2$ équivaut à : $x < \frac{m+2}{m-1}$ car $m-1<0$

$\boxed{\text{Si } m<1, \text{ alors } S = \left]-\infty;\frac{m+2}{m-1}\right[}$

Exercice III

Soit x le nombre de personnes femmes embauchées. Comme l'entreprise veut embaucher autant de femmes que d'hommes, elle embauchera aussi x hommes, et donc il y aura après embauche, $170+x$ femmes et $270+x$ hommes.

On veut que $170+x \underset{\text{au moins égal}}{\geqslant} \overbrace{\frac{2}{3}(270+x)}^{\frac{2}{3}\text{ du nombre d'hommes}}$, donc : $3(170+x) \geqslant 2(270+x)$ car $3>0$

$510+3x \geqslant 540+2x$

$3x-2x \geqslant 540-510$

$x \geqslant 30$.

$S = [30;+\infty[$.

Il faut donc embaucher (au moins) 30 femmes et 30 hommes, c'est à dire au minimum 60 personnes pour que le nombre de femmes soit au moins égal aux deux tiers du nombre d'hommes.

Exercice IV

Exercice III

a) $(2x-1)(-x+5)>0$

Faisons un tableau de signes : $\overbrace{2x-1\geqslant 0}^{+}$ équivaut à $2x\geqslant 1$ c'est-à-dire à $\boxed{x\geqslant \frac{1}{2}}$ $(2>0)$.

$\underbrace{-x+5\geqslant 0}_{+}$ équivaut à $5\geqslant x$ c'est-à-dire $\boxed{x\leqslant 5}$

D'où :

x	$-\infty$		$\frac{1}{2}$		5		$+\infty$
Signe de $2x-1$		$-$	0	$+$		$+$	
Signe de $-x+5$		$+$		$+$	0	$-$	
Signe de $(2x-1)(-x+5)$		$-$	0	$+$	0	$-$	

Grâce au tableau de signes : $(2x-1)(-x+5)>0$ si et seulement si : $\frac{1}{2}<x<5$.

$\boxed{S=\left]\frac{1}{2};5\right[}$.

b) $\dfrac{2x+3}{3x-5}\geqslant 0$.

Faisons un tableau de signes : $2x+3\geqslant 0$ équivaut à $2x\geqslant -3$, c'est-à-dire $x\geqslant -\frac{3}{2}$ $(2>0)$

$3x-5\geqslant 0$ équivaut à $3x\geqslant 5$, c'est-à-dire $x\geqslant \frac{5}{3}$ $(3>0)$.

⚠ $3x-5=0$ ssi $x=\frac{5}{3}$: $\frac{5}{3}$ est la valeur interdite pour le quotient $\dfrac{2x+3}{3x-5}$.

D'où :

x	$-\infty$		$-\frac{3}{2}$		$\frac{5}{3}$		$+\infty$
Signe de $2x+3$		$-$	0	$+$		$+$	
Signe de $3x-5$		$-$		$-$	0	$+$	
Signe de $\dfrac{2x+3}{3x-5}$		$+$	0	$-$	‖	$+$	

D'après le tableau de signes, $\dfrac{2x+3}{3x-5}\geqslant 0$ équivaut à : $x\in\left]-\infty;-\frac{3}{2}\right]\cup\left]\frac{5}{3};+\infty\right[$.

$\boxed{S=\left]-\infty;-\frac{3}{2}\right]\cup\left]\frac{5}{3};+\infty\right[}$

Exercice V

Exercice VI

5

0) Notons $v_{A\to B}$ la vitesse de l'avion lorsqu'il va de A vers B : $v_{A\to B} = V + v$ (effet favorable du vent dans ce sens là).

Notons $v_{B\to A}$ ——— B vers A : $v_{B\to A} = V - v$ (le vent contrarie le mouvement dans ce sens là)

1) i) $t = t_{aller} + t_{retour}$ et la relation temps $= \frac{\text{distance}}{\text{vitesse}}$ conduit à :

$$t = \frac{d}{V} + \frac{d}{V} = \frac{2d}{V}$$ (absence de vent ici), donc $t_{aller} = t_{retour}$!

ii) $T = t'_{aller} + t'_{retour}$

$$T = \frac{d}{V+v} + \underbrace{\frac{d}{V-v}}$$

2) Il s'agit tout bêtement de comparer T et t : si $T > t$, l'effet du vent sera défavorable à l'avion, sinon il sera favorable à l'avion.

$$\text{Or, } T - t = \frac{d}{V+v} + \frac{d}{V-v} - \frac{2d}{V} = d \times \left(\frac{1}{V+v} + \frac{1}{V-v} - \frac{2}{V} \right)$$

$$T - t = d \times \left(\frac{V(V-v)}{V(V+v)(V-v)} + \frac{V(V+v)}{V(V+v)(V-v)} - \frac{2(V+v)(V-v)}{V(V+v)(V-v)} \right)$$

$$T - t = d \times \left(\frac{V^2 \cancel{-Vv} + V^2 \cancel{+Vv} - 2(V^2 - v^2)}{V(V+v)(V-v)} \right)$$

$$T - t = \frac{d \times (2V^2 - 2V^2 + 2v^2)}{V(V+v)(V-v)} = \frac{d \times 2v^2}{V(V+v)(V-v)} = \frac{2dv^2}{V(V+v)(V-v)}$$

Or $d > 0$, $v > 0$, $V > 0$ et $2 > 0$ et $v < V$, donc $V - v > 0$:

donc $\frac{2dv^2}{V(V+v)(V-v)} > 0$, donc $T - t > 0$, donc $T > t$: Sur un aller-retour, le vent aura toujours un effet défavorable sur la durée de vol de l'avion.

Bonus :

Pour se faire une idée, on peut commencer par donner à la boîte les dimensions 5*7*8, et de regarder ce que fait le volume du pavé si l'on augmente un seul côté de 1 unité par exemple.

Sans difficulté, on arrive à : c'est le côté de 5cm, c'est-à-dire le plus petit possible qui doit être augmenté pour obtenir un volume plus grand (comparer : 6*7*8=336, 5*8*8=320 et 5*7*9=315).

$0<a<b<c$ et $V = abc$ désigne le volume du pavé initial.

Soit x un réel positif.

Si on augmente la plus petite longueur a de ce nombre x, (en laissant les autres longueurs des côtés à l'identique), le volume du nouveau pavé créé est $V' = (a+x)bc$, et le volume initial a donc augmenté de :
$V' – V = (a+x)bc - abc = abc + xbc – abc = bcx$.

Si on augmente la longueur intermédiaire b de ce nombre x, (en laissant les autres longueurs des côtés à l'identique), le volume du nouveau pavé créé est $V'' = (b+x)ac$, et le volume initial a donc augmenté de :
$V'' – V = (b+x)ac - abc = abc + xac – abc = acx$.

Si on augmente la longueur du plus grand côté c de ce nombre x, (en laissant les autres longueurs des côtés à l'identique), le volume du nouveau pavé créé est $V''' = (c+x)ab$, et le volume initial a donc augmenté de :
$V''' – V = (c+x)ab - abc = abc + xab – abc = abx$.

On est donc conduit à déterminer, lequel des trois réels bcx, acx et abx est le plus grand.

Or, $0<a<b<c$, donc comme $x>0$, on a : $b(cx)>a(cx)$ et $acx >abx$, donc bcx est le plus grand des trois réels entre acx, bcx et abx.

Donc c'est $V' – V$ la plus grande valeur : **il faut donc augmenter la longueur du plus petit côté a** pour obtenir le volume le plus grand possible **: réponse A.**