Exercice I

a) $f(x) = \dfrac{x+1}{\sqrt{1-x}}$. $\lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ x<1}} (x+1) = 2$ et $\lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ x<1}} (1-x) = 0^+$. Or $\lim\limits_{\substack{X \to 0 \\ X>0}} \sqrt{X} = 0$, donc par limite de composée, $\lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ x<1}} \sqrt{1-x} = 0^+$ et par limite de quotient, $\lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ x<1}} f(x) = +\infty$.

b) $g(x) = -2x + 30\sin(x)$.

$\forall x \in \mathbb{R}$, $-1 \leq \sin(x) \leq 1$, donc $-30 \leq 30\sin(x) \leq 30$ car $30>0$.

donc en particulier, $-2x+30\sin(x) \leq -2x+30$

Or, $\lim\limits_{x \to +\infty} (-2x+30) = -\infty$, donc d'après le théorème de comparaison des limites, $\boxed{\lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = -\infty}$

c) $h(x) = 4x+3-2\sqrt{x}$.

Pour $x>0$, $h(x) = x\left(4+\dfrac{3}{x} - \dfrac{2\sqrt{x}}{x}\right) = x\left(4+\dfrac{3}{x} - \dfrac{2\sqrt{x}}{\sqrt{x}\times\sqrt{x}}\right) = x\left(4+\dfrac{3}{x} - \dfrac{2}{\sqrt{x}}\right)$.

Or, $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{1}{x} = 0$; $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{1}{\sqrt{x}} = 0$, donc par limite de produit et de somme, $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(4+\dfrac{3}{x} - \dfrac{2}{\sqrt{x}}\right) = 4$

Enfin, $\lim\limits_{x \to +\infty} x = +\infty$, donc par limite de produit, $\boxed{\lim\limits_{x \to +\infty} h(x) = +\infty}$

d) Pour tout réel $x < 0$, on a : $0 \leq cos^2(x) \leq 1, donc\ 0 \geq \frac{cos^2(x)}{x} \geq \frac{1}{x}\ \ car\ x < 0.$

Par suite : $\boxed{2 \geq 2 + \frac{cos^2(x)}{x} \geq 2 + \frac{1}{x}}$.

Or $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{1}{x} = 0, donc$ $\boxed{\lim\limits_{x\to+\infty} \left(2+\frac{1}{x}\right) = 2}$ et $\boxed{\lim\limits_{x\to+\infty} (2) = 2}$. Donc, d'après le théorème des gendarmes, $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(2+\frac{cos^2(x)}{x}\right) = 2.$

Exercice II

(d_1) a pour équation $x=-2$ et (d_2) a pour équation $x=1$.

① $y=-1$ est une droite horizontale asymptote à $\mathcal{C}_f$ au voisinage de $-\infty$ et de $+\infty$: (d_3) a pour équation : $y=-1$

② $\boxed{\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -1 \text{ et } \lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = -1.}$; $\boxed{\lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ x<1}} f(x) = +\infty \text{ et } \lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ x>1}} f(x) = -\infty}$; $\boxed{\lim\limits_{\substack{x \to -2 \\ x<-2}} f(x) = +\infty}$

et $\boxed{\lim\limits_{\substack{x \to -2 \\ x>-2}} f(x) = -\infty}$

③

x	$-\infty$		-2		1		$+\infty$
$f(x)$	-1	$\nearrow$	$+\infty$ ‖ $-\infty$	$\nearrow$	$+\infty$ ‖ $-\infty$	$\nearrow$	-1

Exercice III

$g(x) = \dfrac{1}{f(x)}$.

a) $g(x)$ existe ssi $f(x) \neq 0$ ssi $x \neq 3$. Donc $\boxed{\mathcal{D}_g =]-\infty ; 3[\cup]3 ; +\infty[}$.

b) $\boxed{\lim\limits_{x \to -\infty} g(x) = \lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{1}{f(x)} = 0}$ (*) car $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = +\infty$ et par quotient de limite.

$\boxed{\lim\limits_{\substack{x \to 3 \\ x<3}} g(x) = +\infty}$ (**) car $\lim\limits_{\substack{x \to 3 \\ x<3}} f(x) = 0^+$ et par quotient de limite.

De même, $\boxed{\lim\limits_{\substack{x \to 3 \\ x>3}} g(x) = -\infty}$

$\boxed{\lim\limits_{x \to +\infty} g(x)} = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{1}{f(x)} = \boxed{-\infty}$ car $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 0^-$ et par quotient de limite.

c) (*) établit que $\boxed{\mathcal{C}_g \text{ a pour asymptote horizontale l'axe des abscisses au voisinage de } -\infty.}$

(**) établit que $\boxed{\mathcal{C}_g \text{ a pour asymptote verticale la droite d'équation } x=3}$.

Exercice IV

1) $f(x) = \sqrt{\frac{x+2}{x-3}}$ $f(x)$ est calculable si et seulement si $\frac{x+2}{x-3} \geqslant 0$.

On fait un tableau de signes : $x+2 \geqslant 0 \iff x \geqslant -2$; $x-3 \geqslant 0 \iff x \geqslant 3$.

x	$-\infty$	-2		3	$+\infty$
$x+2$	$-$	0	$+$		$+$
$x-3$	$-$		$-$	0	$+$
$\frac{x+2}{x-3}$	$+$	0	$-$	$\parallel$	$+$

Donc $\frac{x+2}{x-3} \geqslant 0 \iff x \in]-\infty ; -2] \cup]3 ; +\infty[$.

$\boxed{\mathcal{D}_f =]-\infty ; -2] \cup]3 ; +\infty[}$

2) On cherche $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$ où $f(x) = \sqrt{\frac{x+2}{x-3}}$.

Pour $x \neq 0$, $\frac{x+2}{x-3} = \frac{x(1+\frac{2}{x})}{x(1-\frac{3}{x})} = \frac{1+\frac{2}{x}}{1-\frac{3}{x}}$.

Or par limite de référence, $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{1}{x} = 0$, donc par limite de produit et de somme : $\begin{cases} \lim\limits_{x \to +\infty} (1+\frac{2}{x}) = 1 \\ \lim\limits_{x \to +\infty} (1-\frac{3}{x}) = 1 \end{cases}$

Par limite de quotient, $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{1+\frac{2}{x}}{1-\frac{3}{x}} = 1$, donc $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{x+2}{x-3} = 1$.

Or, $\lim\limits_{X \to 1} \sqrt{X} = 1$, donc par limite de fonctions composées on a : $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 1$: la droite d'équation $y = 1$ est donc asymptote horizontale à $\mathcal{C}_f$ au voisinage de $+\infty$.

Exercice V

44 **a)** La fonction exponentielle est croissante sur $\mathbb{R}$ donc pour tout réel $x > 0$, $e^x > e^0$ c'est-à-dire $e^x > 1$.
La fonction inverse est strictement décroissante sur $]0 ; +\infty[$ donc pour tout réel $x > 0$,
$0 \leqslant \frac{1}{e^x} \leqslant 1$ c'est-à-dire $0 \leqslant e^{-x} \leqslant 1$.
Ainsi pour tout réel $x > 0$, $0 \leqslant \frac{e^{-x}}{x} \leqslant \frac{1}{x}$ c'est-à-dire $0 \leqslant g(x) \leqslant \frac{1}{x}$.

b) $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(\frac{1}{x}\right) = 0$ donc d'après le théorème des gendarmes $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = 0$.

54 • Pour tout nombre réel $x \neq 0$,

$$f(x) = x^3\left(\frac{1}{4} + \frac{1}{x} - \frac{9}{x^2}\right).$$

• D'après les règles opératoires

$$\lim_{x \to +\infty}\left(\frac{1}{4} + \frac{1}{x} - \frac{9}{x^2}\right) = \frac{1}{4}.$$

D'autre part, $\lim\limits_{x \to +\infty}(x^3) = +\infty$.

D'après la limite d'un produit $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$.

• D'après les règles opératoires

$$\lim_{x \to -\infty}\left(\frac{1}{4} + \frac{1}{x} - \frac{9}{x^2}\right) = \frac{1}{4}.$$

D'autre part, $\lim\limits_{x \to -\infty}(x^3) = -\infty$.

D'après la limite d'un produit $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$.

67 • $\lim\limits_{x \to +\infty}(x + 1) = +\infty$.

D'autre part, $\lim\limits_{x \to +\infty}(e^x + 1) = +\infty$, d'après la limite d'un quotient $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{4}{e^x + 1} = 0$.

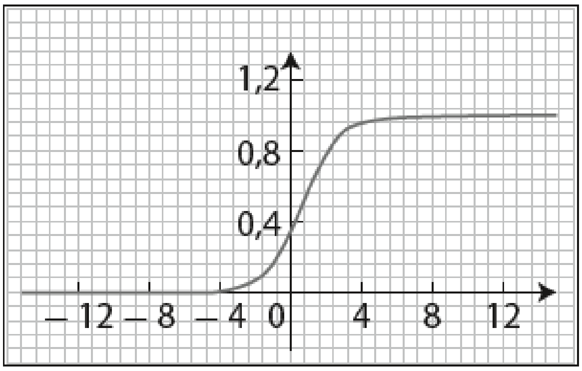
D'après la limite d'une somme, $\lim\limits_{x \to +\infty} h(x) = +\infty$.

• $\lim\limits_{x \to -\infty}(x + 1) = -\infty$.

D'autre part, $\lim\limits_{x \to -\infty}(e^x + 1) = 1$, d'après la limite d'un quotient $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{4}{e^x + 1} = 4$.

D'après la limite d'une somme, $\lim\limits_{x \to -\infty} h(x) = -\infty$.

69 **a)**



On conjecture que $\lim_{x\to+\infty} f(x)=1$ et que $\lim_{x\to-\infty} f(x)=0$.

b) $\lim_{x\to-\infty} e^x=0$ donc $\lim_{x\to-\infty}(2+e^x)=2$.

D'après la limite d'un quotient $\lim_{x\to-\infty} f(x)=0$.

c) $f(x)=\dfrac{e^x}{e^x\left(\dfrac{2}{e^x}+1\right)}=\dfrac{1}{2e^{-x}+1}$.

$\lim_{x\to+\infty} e^{-x}=\lim_{x\to+\infty}\dfrac{1}{e^x}=0$, donc $\lim_{x\to+\infty}(2e^{-x}+1)=1$.

D'après la limite d'un quotient $\lim_{x\to+\infty} f(x)=1$.

d) On note $\mathscr{C}$ la courbe représentative de la fonction f dans un repère orthonormé.

La droite d d'équation $y=0$ (l'axe des ordonnées) est une asymptote horizontale en - ∞ à la courbe $\mathscr{C}$.

La droite d' d'équation $y=1$ est une asymptote horizontale en $+\infty$ à la courbe $\mathscr{C}$.

77 Pour tout réel $x>0$, $k(x)=e^{2x}\times\left(1-\dfrac{x}{e^x}\right)$.

$\lim_{x\to+\infty}\left(\dfrac{e^x}{x}\right)=+\infty$ donc $\lim_{x\to+\infty}\left(\dfrac{x}{e^x}\right)=0$ et alors $\lim_{x\to+\infty}\left(1-\dfrac{x}{e^x}\right)=1$. D'autre part, $\lim_{x\to+\infty} e^{2x}=+\infty$.

D'après la limite d'un produit $\lim_{x\to+\infty} k(x)=+\infty$.

Exercice VI

101 **1.** La fonction Q est dérivable sur $[0\,;+\infty[$ et pour tout réel $t \geqslant 0$, $Q'(t) = -\,1{,}2 \times 1{,}8e^{-\,1{,}2t}$.
Pour tout réel $t \geqslant 0$, $Q'(t) < 0$ donc la fonction Q est décroissante sur $[0\,;+\infty[$.

2. a) On utilise le schéma de décomposition ci-contre.

$$t \mapsto \underbrace{-1{,}2t}_{T \mapsto e^T}$$

$\lim\limits_{t \to +\infty} T = -\infty$ et $\lim\limits_{T \to -\infty} e^T = 0$.

Ainsi $\lim\limits_{t \to +\infty} e^{-1{,}2t} = 0$.

Donc $\lim\limits_{t \to +\infty} Q(t) = 0$.

b) La quantité de médicament tend vers 0 quand t augmente.

3. a) On est certain que l'algorithme se termine.
En effet, $\lim\limits_{t \to +\infty} Q(t) = 0$ donc pour tout réel positif R, l'intervalle $]0\,;R[$ contient tous les nombres $Q(t)$ pour t assez grand.

b)

```
from math import*
def Q(t):
    y=1.8*exp(-1.2*t)
    return y
def Seuil(R):
    t=0
    while(Q(t)>R):
        t=t+0.01
    return(t)
```

c) $R = 0{,}9 \quad t = 0{,}58$

$R = 0{,}1 \quad t = 2{,}41$

$R = 0{,}05 \quad t = 2{,}99$

Remarque : *erreur à la ligne du While : c'est : While (Q(t)* **>=** *R).*

Exercice VII

102 **1. a)** $f(x)=\dfrac{e^x(1+e^{-2x})}{e^x(1-e^{-3x})}=\dfrac{1+e^{-2x}}{1-e^{-3x}}$.

$\lim\limits_{x\to+\infty}(1+e^{-2x})=1$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}(1-e^{-3x})=1$.

D'après la limite d'un quotient $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=1$.

b) $f(x)=\dfrac{e^{-x}(e^{2x}+1)}{e^{-2x}(e^{3x}-1)}=e^x\times\dfrac{e^{2x}+1}{e^{3x}-1}$.

$\lim\limits_{x\to-\infty}(e^{2x}+1)=1$ et $\lim\limits_{x\to-\infty}(e^{3x}-1)=-1$.

D'après la limite d'un quotient $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\dfrac{e^{2x}+1}{e^{3x}-1}\right)=-1$.

D'autre part, $\lim\limits_{x\to-\infty}e^x=0$.

D'après la limite d'un produit $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=0$.

2. $\lim\limits_{x\to0}(e^x+e^{-x})=2$ et $\lim\limits_{x\to0}(e^x-e^{-2x})=0$.

On construit le tableau de signe de e^x-e^{-2x}.

Pour cela on peut remarquer que

$e^x-e^{-2x}=e^{-2x}(e^{3x}-1)$.

x	$-\infty$		0		$+\infty$
e^x-e^{-2x}		$-$	0	$+$	

On en déduit $\lim\limits_{\substack{x\to0\\x<0}}f(x)=-\infty$ et $\lim\limits_{\substack{x\to0\\x>0}}f(x)=+\infty$.

3. La droite d_1 d'équation $y=1$ est une asymptote horizontale en $+\infty$ à la courbe.

La droite d_2 d'équation $y=0$ (l'axe des abscisses) est une asymptote horizontale en $-\infty$ à la courbe.

La droite d_3 d'équation $x=0$ (l'axe des ordonnées) est une asymptote verticale à la courbe.

Exercice VIII

a) $ch(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$.

$\lim_{x\to+\infty} e^x = +\infty$ et $\lim_{x\to+\infty} e^{-x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{e^x} = 0$.

donc par limite de somme et produit : $\boxed{\lim_{x\to+\infty} ch(x) = +\infty}$.

$\lim_{x\to-\infty} e^x = 0^+$ et $\lim_{x\to-\infty} \frac{1}{e^x} = +\infty$, donc par somme et produit, $\boxed{\lim_{x\to-\infty} ch(x) = +\infty}$

Par le même procédé, on obtient sans mal : $\boxed{\lim_{x\to+\infty} sh(x) = +\infty \text{ et } \lim_{x\to-\infty} sh(x) = -\infty}$

b) $\forall x \in \mathbb{R}$, $-x \in \mathbb{R}$, et $ch(-x) = \frac{e^{-x} + e^{-(-x)}}{2} = \frac{e^{-x} + e^{x}}{2} = ch(x)$.

donc ch est paire sur $\mathbb{R}$.

$\forall x \in \mathbb{R}$, $e^x > 0$, $e^{-x} > 0$, $2 > 0$, donc $\frac{e^x + e^{-x}}{2} > 0$, donc $ch(x) > 0$.

de même : $sh(-x) = \frac{e^{-x} - e^{-(-x)}}{2} = \frac{e^{-x} - e^{x}}{2} = -\frac{(e^x - e^{-x})}{2} = -sh(x)$

donc sh est impaire sur $\mathbb{R}$.

c) $\forall x \in \mathbb{R}$, $sh'(x) = \frac{e^x - (-1)e^{-x}}{2} = \frac{e^x + e^{-x}}{2} = ch(x)$.

D'après (b), $ch(x) > 0$ sur $\mathbb{R}$, donc $sh'(x) > 0$ sur $\mathbb{R}$ donc sh est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$sh(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

d) $ch'(x) = \frac{e^x + (-1)e^{-x}}{2} = \frac{e^x - e^{-x}}{2} = sh(x)$.

Grâce à c) : sh croît sur $\mathbb{R}$ et $sh(0) = 0$, donc $\forall x \in]-\infty ; 0]$, $sh(x) \leq 0$

et $\forall x \in [0 ; +\infty[$, $sh(x) \geq 0$

Donc :

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$ch' = sh$		$-$	0	$+$	
$ch(x)$	$+\infty$	$\searrow$	1	$\nearrow$	$+\infty$

$ch(0) = \frac{e^0 + e^{-0}}{2} = \frac{2}{2} = 1$

e) ch et sh sont deux fois dérivables sur $\mathbb{R}$ et :

$\forall x\in\mathbb{R}$, $ch''(x) = ch(x)$. Or $ch(x)\geq 1>0$, donc ch est CONVEXE sur $\mathbb{R}$.

$sh''(x) = sh(x)$ et $sh(x)\geq 0 \iff x\geq 0$, donc sh est CONVEXE sur $[0;+\infty[$

et concave sur $]-\infty;0]$.

f) $\forall x\in\mathbb{R}$: $ch^2(x)-sh^2(x) = \big(ch(x)+sh(x)\big)\big(ch(x)-sh(x)\big)$ (IR n°3)

$$ch^2(x)-sh^2(x) = \underbrace{\left(\frac{e^x+e^{-x}}{2}+\frac{e^x-e^{-x}}{2}\right)}\underbrace{\left(\frac{e^x+e^{-x}}{2}-\frac{e^x-e^{-x}}{2}\right)}$$

$$\boxed{ch^2(x)-sh^2(x)} = \frac{2e^x}{2}\times\frac{2e^{-x}}{2} = e^x\times e^{-x} = e^{x-x} = e^0 = \boxed{1}$$

g) $th(x) = \dfrac{sh(x)}{ch(x)}$

$\boxed{\mathcal{D}_{th}=\mathbb{R}}$ car $\forall x\in\mathbb{R}$, $ch(x)\geq 1$, donc $ch(x)\neq 0$ (pas de V.I par le quotient).

h) $$\lim_{x\to-\infty} th(x) = \lim_{x\to-\infty}\frac{e^x-e^{-x}}{e^x+e^{-x}} = \lim_{x\to-\infty}\frac{e^x-\frac{1}{e^x}}{e^x+\frac{1}{e^x}} = \lim_{x\to-\infty}\frac{e^{2x}-1}{e^{2x}+1}.$$

Or, $\lim\limits_{x\to-\infty} 2x=-\infty$ et $\lim\limits_{X\to-\infty} e^{2x}=0$, donc $\lim\limits_{x\to-\infty}(e^{2x}-1)=-1$ et de même

$\lim\limits_{x\to-\infty}(e^{2x}+1)=1$, donc par quotient : $\boxed{\lim\limits_{x\to-\infty} th(x) = -1}$

En observant que th est impaire sur $\mathbb{R}$, on obtient sans peine : $\boxed{\lim\limits_{x\to+\infty} th(x)=1}$

$\mathcal{C}_{th}$ admet donc deux asymptotes horizontales : $y=-1$ en $-\infty$ et $y=1$ en $+\infty$.

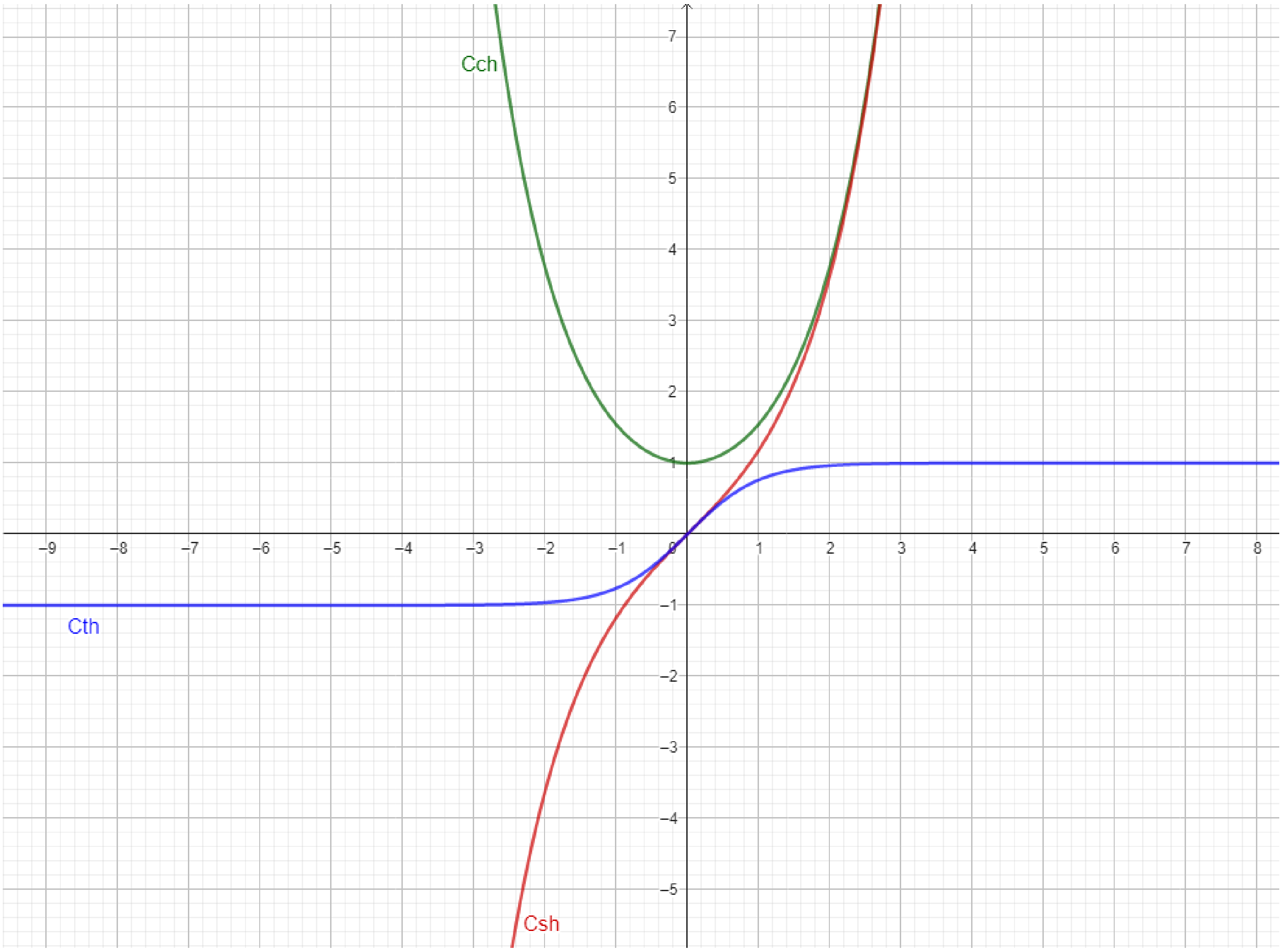
i) $\forall x\in\mathbb{R}$, $th'(x) = \dfrac{sh'(x)ch(x)-sh(x)ch'(x)}{ch^2(x)}$ (dérivée d'un quotient de type $\frac{u}{v}$).

Grâce à 1-c et 1-d : $th'(x) = \dfrac{ch^2(x)-sh^2(x)}{ch^2(x)} \underset{\text{1-f}}{=} \dfrac{1}{ch^2(x)}\ (>0)$.

Donc th croît strictement sur $\mathbb{R}$.

x	$-\infty$	$+\infty$
$th(x)$	-1 ↗	1

j) Facile !



<u>BONUS</u> :

<u>I-</u>

FAUX : *l'exo 69 que vous venez de traiter dans l'exercice IV vous donne un contre-exemple.*

Ou encore plus simplement : *prenons les fonctions f et g définies sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = x+1$ et $g(x) = x$.*

$f(x)/(g(x) = \frac{x+1}{x} = \frac{x}{x} + \frac{1}{x} = 1 + \frac{1}{x}$ qui admet par limite de référence et de somme 1 pour limite en $+\infty$, et $f(x) - g(x) = x + 1 - x = 1$ donc la limite de $f - g$ en $+\infty$ est égale à 1 et pas à 0 !!!

<u>II-</u>

$a>1$; $f(x)=\frac{1}{x}$; $f'(x)=-\frac{1}{x^2}$.

$A\left(a;\frac{1}{a}\right)$; $B\left(\frac{1}{a};a\right)$ car $\frac{1}{\frac{1}{a}}=1\times\frac{a}{1}=a$. (Se référer à la figure pour les différents points).

L'équation de la tangente à $\mathcal{C}_f$ en A est : $y=f'(a)(x-a)+f(a)=-\frac{1}{a^2}(x-a)+\frac{1}{a}=\frac{-x}{a^2}+\frac{a}{a^2}+\frac{1}{a}$.

$\boxed{y=-\frac{x}{a^2}+\frac{2}{a}}$ Cette droite, notée (TA), rencontre (Ox) en $C(x;0)$ avec x vérifiant : $0=-\frac{x}{a^2}+\frac{2}{a}$, car $C\in TA$.

d'où $\frac{x}{a^2}=\frac{2}{a}$ et $x=\frac{2a^2}{a}=2a$.

Donc $\boxed{C(2a;0)}$

De même, la tangente à $\mathcal{C}_f$ en B est : $y=f'\left(\frac{1}{a}\right)\left(x-\frac{1}{a}\right)+f\left(\frac{1}{a}\right)=\frac{-1}{\left(\frac{1}{a}\right)^2}\left(x-\frac{1}{a}\right)+\frac{1}{\frac{1}{a}}$

$y=-a^2\left(x-\frac{1}{a}\right)+a=-a^2x+\frac{a^2}{a}+a$

$\boxed{y=-a^2x+2a}$ Cette droite, notée (TB), rencontre (Ox) en $D(x;0)$ avec x solution de : $0=-a^2x+2a$

d'où $a^2x=2a$ et $x=\frac{2a}{a^2}=\frac{2}{a}$.

Donc $\boxed{D\left(\frac{2}{a};0\right)}$

Reste à évaluer la hauteur du triangle grisé : pour ce faire, nous avons besoin des coordonnées du point E, intersection de (TA) et (TB) :

$$E(x;y)\in(TA)\cap(TB)\iff\begin{cases}y=-\frac{x}{a^2}+\frac{2}{a}\\ \text{et}\\ y=-a^2x+2a\end{cases}\iff\begin{cases}y=-\frac{x}{a^2}+\frac{2}{a}\\ -\frac{x}{a^2}+\frac{2}{a}=-a^2x+2a\end{cases}\iff\begin{cases}y=-\frac{x}{a^2}+\frac{2}{a}\\ x\left(a^2-\frac{1}{a^2}\right)=2a-\frac{2}{a}\end{cases}$$

$$\iff\begin{cases}y=-\frac{x}{a^2}+\frac{2}{a}\\ x\left(\frac{a^4-1}{a^2}\right)=\frac{2(a^2-1)}{a}\end{cases}\underset{\substack{a>1\\ \text{donc } a^4-1\neq 0\\ \text{et } a^2\neq 0}}{\iff}\begin{cases}x=\frac{2(a^2-1)}{a}\times\frac{a^2}{a^4-1}=\frac{2(a^2-1)\times a}{(a^2-1)(a^2+1)}=\frac{2a}{a^2+1}.\\ \text{et}\\ y=-\frac{x}{a^2}+\frac{2}{a}=\frac{-\frac{2a}{a^2+1}}{a^2}+\frac{2}{a}=\frac{-2a}{a^2+1}\times\frac{1}{a^2}+\frac{2}{a}\end{cases}$$

$$\iff\begin{cases}x=\frac{2a}{a^2+1}\\ y=\frac{-2}{a(a^2+1)}+\frac{2}{a}\end{cases}\iff\begin{cases}x=\frac{2a}{a^2+1}\\ \text{et}\\ y=\frac{-2}{a(a^2+1)}+\frac{2(a^2+1)}{a(a^2+1)}=\frac{2a^2}{a(a^2+1)}=\frac{2a}{a^2+1}.\end{cases}$$

Donc $\boxed{E\left(\frac{2a}{a^2+1};\frac{2a}{a^2+1}\right)}$

Par suite, $S(a)=\frac{CD\times EH}{2}$ où H est le pied de la hauteur issue de E du triangle CDE.

($H\in(Ox)$) et $\boxed{H\left(\frac{2a}{a^2+1};0\right)}$

$CD=\left|2a-\frac{2}{a}\right|=2a-\frac{2}{a}$ car comme $a>1$, $\frac{1}{a}<1$, et donc $\frac{1}{a}<1<a$ et $a-\frac{1}{a}>0$, donc $2a-\frac{2}{a}>0$.

Enfin, $EH=\frac{2a}{a^2+1}$.

Bref, $\boxed{S(a)}=\frac{\left(2a-\frac{2}{a}\right)\times\frac{2a}{a^2+1}}{2}=\frac{2(a^2-1)\times 2a}{a(a^2+1)}\times\frac{1}{2}=\boxed{\frac{2(a^2-1)}{a^2+1}}$

$\lim\limits_{a\to+\infty}S(a)=\lim\limits_{a\to+\infty}\frac{2a^2-2}{a^2+1}=\lim\limits_{a\to+\infty}\frac{a^2\left(2-\frac{2}{a^2}\right)}{a^2\left(1+\frac{1}{a^2}\right)}=\lim\limits_{a\to+\infty}\frac{\left(2-\frac{2}{a^2}\right)}{1+\frac{1}{a^2}}=2$ car $\lim\limits_{a\to+\infty}\frac{1}{a^2}=0$ et par somme, produit et quotient de limites.