Exercice I

1) $O(0;0)$; $I(1;0)$; $J(1;0)$; $A(1;1)$; $K(\frac{1}{2};0)$; $L(\frac{1}{2};\frac{1}{2})$.

1b) M est le milieu de $[JL]$, donc $M(x_M;y_M)$ avec : $\begin{cases} x_M = \dfrac{x_J+x_L}{2} = \dfrac{0+\frac{1}{2}}{2} = \dfrac{1}{4} \\ y_M = \dfrac{y_J+y_L}{2} = \dfrac{1+\frac{1}{2}}{2} = \dfrac{\frac{3}{2}}{2} = \dfrac{3}{4} \end{cases}$.

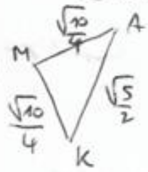
Donc $\underline{M(\frac{1}{4};\frac{3}{4})}$.

1c) $MA = \sqrt{(x_A-x_M)^2+(y_A-y_M)^2} = \sqrt{(1-\frac{1}{4})^2+(1-\frac{3}{4})^2} = \sqrt{(\frac{3}{4})^2+(\frac{1}{4})^2} = \sqrt{\frac{9}{16}+\frac{1}{16}}$.

$\boxed{MA} = \sqrt{\frac{10}{16}} = \frac{\sqrt{10}}{\sqrt{16}} = \boxed{\frac{\sqrt{10}}{4}}$

1d) $MA = \frac{\sqrt{10}}{4}$ et $MK = \frac{\sqrt{10}}{4}$, donc $\underline{MA = MK}$: Ainsi, <u>M est équidistant des points A et K</u> et à ce titre, <u>M appartient à la médiatrice du segment $[AK]$</u>.

2)



D'une part : $AK^2 = \left(\frac{\sqrt{5}}{2}\right)^2 = \frac{5}{4}$.

D'autre part : $MA^2+MK^2 = \left(\frac{\sqrt{10}}{4}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{10}}{4}\right)^2 = 2\times\left(\frac{\sqrt{10}}{4}\right)^2 = 2\times\frac{10}{16} = \frac{20}{16} = \frac{5}{4}$

Ainsi, $AK^2 = MA^2+MK^2$.

Donc d'après la réciproque du théorème de Pythagore, le triangle <u>MAK est rectangle en M</u>.

Comme $MA = MK$, $\boxed{\text{MAK est un triangle rectangle et isocèle en M}}$

3a) $\boxed{\mathcal{A}(AMK)} \overset{\text{car AMK rectangle en M!}}{=} \dfrac{MA\times MK}{2} = \dfrac{\frac{\sqrt{10}}{4}\times\frac{\sqrt{10}}{4}}{2} = \dfrac{\frac{10}{16}}{2} = \dfrac{10}{16}\times\dfrac{1}{2} = \dfrac{\cancel{2}\times 5}{16\times\cancel{2}} = \boxed{\dfrac{5}{16}}$ u. Aires.

3b) Facile : H est le point d'intersection de (AK) et de la perpendiculaire à (AK) passant par M.

3c) On cherche ici MH :

$\underbrace{\text{Aire}(AMK)}_{q.\,3a} = \dfrac{AK\times MH}{2}$ car $(MH)\perp(AK)$.

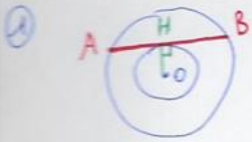
$\dfrac{5}{16} = \dfrac{\frac{\sqrt{5}}{2}\times MH}{2}$

$\dfrac{5}{16} = \dfrac{\sqrt{5}}{4}\times MH$, donc $\boxed{MH} = \dfrac{5}{16} \div \dfrac{\sqrt{5}}{4} = \dfrac{5}{16}\times\dfrac{4}{\sqrt{5}} = \dfrac{\cancel{\sqrt{5}}\times\sqrt{5}\times\cancel{4}}{4\times\cancel{4}\times\cancel{\sqrt{5}}} = \boxed{\dfrac{\sqrt{5}}{4}}$ u.l.

Exercice II

Exercice III

1)



Soit R le rayon du grand cercle, et r celui du petit cercle.

$\mathcal{A} = \pi R^2 - \pi r^2 = \pi(R^2 - r^2)$

Soit H le projeté orthogonal de O sur (AB) : les triangles OHA et OHB étant identiques, H est le milieu de [AB], donc $AH = \frac{24}{2} = 12\text{ cm}$.

Le théorème de Pythagore appliqué au triangle AHO rectangle en H dit :

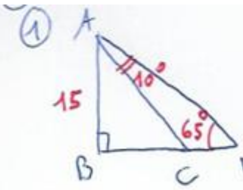
$OA^2 = AH^2 + HO^2$

$R^2 = 12^2 + \underbrace{HO^2}_{r^2}$

$\boxed{R^2 - r^2} = 12^2 = \boxed{144}$, donc $\boxed{\mathcal{A} = \pi \times 144 = 144\pi \text{ cm}^2}$.

2)

1)



$AB = 15$; $\widehat{ADB} = 65°$ et $\widehat{CAD} = 10°$.

$\mathcal{P}(ACD) = AC + CD + AD$ avec :

Dans le triangle BAC rectangle en B, $\cos(\widehat{BAC}) = \frac{AB}{AC}$, avec $\widehat{BAC} = 90 - (65+10) = 90 - 75 = 15°$.

Donc $\boxed{AC} = \frac{BA}{\cos(\widehat{BAC})} = \boxed{\frac{15}{\cos(15)}}$ cm.

et $\sin(\widehat{BAC}) = \frac{BC}{BA}$, donc $\boxed{BC} = BA \sin(\widehat{BAC}) = \boxed{15\sin(15)}$.

Enfin, dans le triangle BAD rectangle en B : $\sin(\widehat{BDA}) = \frac{AB}{AD}$, donc $\boxed{AD} = \frac{AB}{\sin(\widehat{BDA})} = \boxed{\frac{15}{\sin(65)}}$

et $\tan(\widehat{BDA}) = \frac{AB}{BA}$ Donc $\boxed{DB} = BA\tan(\widehat{BDA}) = \boxed{15\tan(65)}$

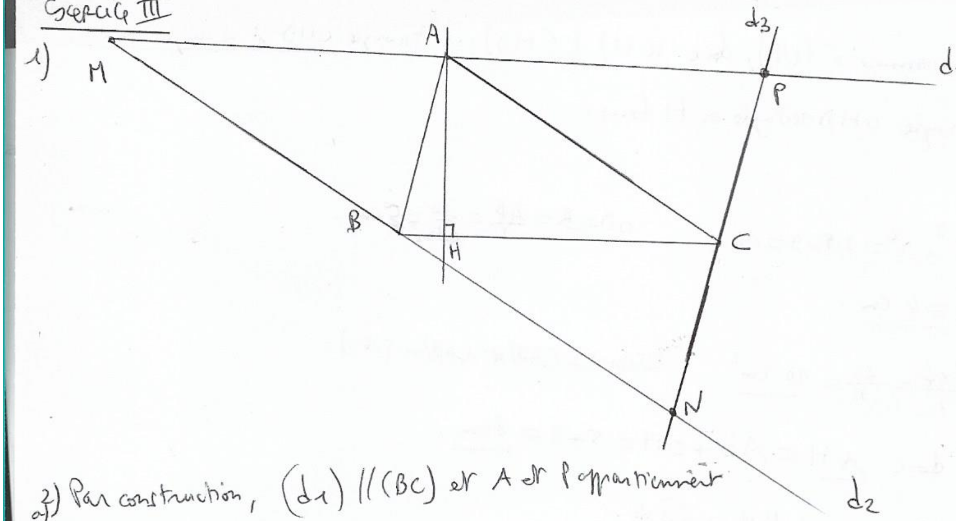
Donc comme B, C, D sont aussi alignés, on a : $\boxed{CD} = BD - BC = \boxed{15\tan(65) - 15\sin(15)}$.

D'où $\mathcal{P}(ABC) = AC + CD + AD = \frac{15}{\cos(15)} + 15\tan(65) - 15\sin(15) + \frac{15}{\sin(65)}$

Exercice facultatif

Exercice III

1)



2a) Par construction, (d1) // (BC) et A et P appartiennent à d1, donc (AP) // (BC).

de même, (AB) // (PC).

Or si un quadrilatère a ses côtés opposés deux à deux parallèles, alors c'est un pgm.

donc APCB est un pgm.

même raisonnement pour établir que ACBM est un pgm.

2b) APCB est un pgm, or les côtés opposés d'un pgm ont la même longueur, donc AP = BC.

ACBM est un pgm, donc par le même raisonnement, AM = BC

Par suite, on a : AP = AM (= BC).

Or M, A, P sont ainsi alignés et AP = AM, donc A est le milieu du segment [MP].

2c) Par définition du projeté orthogonal, (AH) ⊥ (BC).

Or d'après 2a) on a : (AP) // (BC).

On sait que si deux droites du plan sont parallèles, toute perpendiculaire à l'une est perpendiculaire à l'autre

donc (AH) ⊥ (AP), et comme (AP) = (MP) = d1, on a : (AH) ⊥ (MP) avec A = milieu de [MP] :

Ainsi, (AH) est la médiatrice du segment [MP].

2d) En raisonnant de façon similaire à 2c), la hauteur issue de B du triangle ABC est la médiatrice du segment [MN] et la hauteur issue de C du triangle ABC est la médiatrice du segment [NP].

Or (cf. cours), les trois médiatrices d'un triangle sont concourantes.

Par suite, comme les médiatrices des côtés du triangle MNP sont les hauteurs du triangle ABC, il en résulte que les trois hauteurs du triangle ABC sont concourantes !

Exercice III

1) $\boxed{0{,}86 < \frac{\sqrt{3}}{2} < 0{,}87}$; $\boxed{0{,}1428 < \frac{1}{7} < 0{,}1429}$

2) $\boxed{P} = 2\pi R = 2\pi \times 10 = \boxed{20\pi \text{ mètres}}$

: $1\text{cm} = \frac{1}{100}\text{m}$.

On cherche a et b tels que : $a < \pi < b$ donc $20a < 20\pi < 20b$ tels que $20b - 20a = 0{,}01$

$20(b-a) = 0{,}01$, donc $b - a = \frac{0{,}01}{20} = 5 \times 10^{-4}$

Or $\pi \simeq 3{,}1415926535\ldots$, donc avec $\underline{3{,}14155 < \pi < 3{,}1416}$ et $3{,}1416 - 3{,}14155 = 5 \times 10^{-4}$.

On obtient bien : $62{,}831 < P < 62{,}832$

Exercice IV

① Faux : par exemple, $3{,}14 < \pi$ mais $3{,}14 > 3{,}1$! ($\pi \simeq 3{,}1415926535$).
Ctrex : $x = 3{,}14$

② Faux : ctrex : $1{,}5 \in [0{,}8 ; 2]$, mais $1{,}5 \notin [0{,}7 ; 1]$ car $1{,}5 > 1$.

③ Faux : $\mathbb{Z} \cap]-1 ; 0[= \emptyset$ (aucun élément commun à ces 2 ensembles).

④ Faux : le décimal $3{,}400000005$ appartient à $]3{,}4 ; 3{,}400001[$.

⑤ Vrai : Si $x > 1$, alors $x \times x > x \times 1$ car $x > 1 > 0$

Donc $\boxed{x^2 > x}$.

Si $x > 1$, alors $x \times x^2 > 1 \times x^2$, c'est-à-dire : $\boxed{x^3 > x^2}$

Ainsi, par transitivité de la relation ($>$) on a : $x^3 > x^2$ et $x^2 > x$, donc $\boxed{x^3 > x}$.

Exercice V

1) a) $x \in [0 ; 1{,}5] \iff 0 \leq x \leq 1{,}5$

b) $x \in]1{,}2 ; +\infty[\iff x > 1{,}2$

c) $x \notin [3 ; +\infty[\iff x < 3$

2) a) $1 < x \leq 3{,}4 \iff x \in]1 ; 3{,}4[$; b) $x > 3 \iff x \in]3 ; +\infty[$.

3)

Faire des dessins !!

$\underline{I \cap J = [14 ; 15[}$; $\underline{I \cup J = [12 ; 20]}$.

$\underline{I \cap J =]-2\pi ; -\pi]}$; $\underline{I \cup J =]-\infty ; +\infty[= \mathbb{R}}$.

<u>Point Logique</u>

1. Il reste 23 billes pour les couleurs blanches et noires.

Dans le cas où le hasard est défavorable, on pioche 5 séries de 11 billes de chacune des couleurs, donc avec 55 billes piochées, on n'atteint pas l'objectif fixé dans ce cas-là, mais celle piochés juste après, la 56 ième bille piochée, quelle que soit sa couleur, garantit qu'on en aura au moins 12 d'une même couleur !

2.

Si A est vrai, alors il dit vrai Jeudi, et donc aussi samedi (alternance Vrai/Faux), donc c'est en contradiction avec la phrase E ! (Demain serait Vendredi).

La phrase D ne peut être dite que par un menteur, sans quoi une personne dirait vrai deux jours d'affilée.

Puisque l'affirmation C est vraie (2024/11=184), et qu'on a déjà trouvé deux phrases fausses, c'est qu'il a dit quatre phrases fausses ce jour-là, et donc C est la phrase qu'il n'a pas pu prononcer ce jour-là car C est vraie.