Seconde **Corrigé du DM3** **Octobre 2024**

Exercice I

Exercice I

1) $A = \dfrac{7^{12} \times 7^{-4}}{(7^3)^5} = \dfrac{7^8}{7^{15}} = 7^{8-15} = \boxed{7^{-7}}$

$B = \left(\dfrac{3}{5}\right)^7 \times 5^5 \times 3^{-5} = \dfrac{3^7 \times 5^5 \times 3^{-5}}{5^7} = 3^2 \times 5^{5-7} = 3^2 \times 5^{-2}$

$\boxed{B} = 3^2 \times \dfrac{1}{5^2} = \boxed{\left(\dfrac{3}{5}\right)^2}$

$\boxed{C} = 16 \times 2^9 = 2^4 \times 2^9 = \boxed{2^{13}}$

$\boxed{D} = \dfrac{27^6 \times 3^7}{9^8} = \dfrac{(3^3)^6 \times 3^7}{(3^2)^8} = \dfrac{3^{18} \times 3^7}{3^{16}} = \dfrac{3^{25}}{3^{16}} = \boxed{3^9}$

$\boxed{E} = \dfrac{4^6}{2^4} + \dfrac{2}{2^{-7}} = \dfrac{(2^2)^6}{2^4} + \dfrac{2^1}{2^{-7}} = \dfrac{2^{12}}{2^4} + 2^{1-(-7)} = 2^{12-4} + 2^8 = 2^8 + 2^8 = 2 \times 2^8 = \boxed{2^9}$

$\boxed{F} = \dfrac{(3^4)^7}{2^{28} \times 5^{28}} = \dfrac{3^{28}}{(2\times 5)^{28}} = \dfrac{3^{28}}{10^{28}} = \left(\dfrac{3}{10}\right)^{28} = \boxed{0{,}3^{28}}$

$G = \left(\dfrac{1}{x^{-n}}\right)^3 \times x^{2n+1} = \left(x^{-(-n)}\right)^3 \times x^{2n+1}$

$\boxed{G} = (x^n)^3 \times x^{2n+1} = x^{3n} \times x^{2n+1} = \boxed{x^{5n+1}}$

2) $E = a^{-14} b^{-6} (ab)^3 = a^{-14} \times b^{-6} \times a^3 \times b^3$

$\boxed{E} = a^{-14} \times a^3 \times b^{-6} \times b^3 = \boxed{a^{-11} \times b^{-3}}$

3) $4^{4-n} \times 2^{2n-6} = (2^2)^{4-n} \times 2^{2n-6} = 2^{2(4-n)} \times 2^{2n-6} = 2^{8-2n} \times 2^{2n-6} = 2^{8-2n+2n-6} = 2^2 = \boxed{4}$

La valeur de cette expression est égale à 4, quelle que soit la valeur de n.

4) $\boxed{G} = x^2 - 13 = x^2 - (\sqrt{13})^2 = \boxed{(x+\sqrt{13})(x-\sqrt{13})}$

5) $a^4 - b^4 = (a^2)^2 - (b^2)^2 = (a^2+b^2)(a^2-b^2) = (a^2+b^2)(a+b)(a-b)$

6)

$\boxed{M} = \dfrac{5^{2020} + 5^{2021} + 5^{2022}}{5^{2020}} = \dfrac{5^{2020}(1+5+5^2)}{5^{2020}} = 1+5+5^2 = \boxed{31}$

Exercice II

2) 300×10^6 m/s $= 300 \times 10^6 \times 10^{-3}$ km/s car 1 m $= 10^{-3}$ km.

300×10^6 m/s $= 300 \times 10^3 = 3 \times 10^2 \times 10^3 = 3 \times 10^5$ km/s.

Dans une année, assimilée à 365 jours, il y a : $365 \times 24 \times 3600$ secondes.

Avec la relation : $D = V.t$, on a : $D = 3 \times 10^5 \times 365 \times 24 \times 3600$, $\boxed{D \approx 9{,}46 \times 10^{12} \text{ km}}$

1) $\boxed{A} = \dfrac{2{,}5 \times (10^{-3})^2 \times 4 \times 10^7}{0{,}8 \times 10^{-3}} = \dfrac{2{,}5 \times 4 \times 10^{-6} \times 10^7}{0{,}8 \times 10^{-3}} = \dfrac{10 \times 10^{-6} \times 10^7}{0{,}8 \times 10^{-3}} = \dfrac{1}{0{,}8} \times 10^{1-6+7+3} = \boxed{1{,}25 \times 10^4}$

3) Notons m la masse d'un atome de carbone : $m = \dfrac{12}{6{,}02214076 \times 10^{23}}$ $\boxed{m \approx 2 \times 10^{-23} \text{ g}}$ 2

4) 802500 est "proche" de 8×10^5 et 1995874561 est proche de 2×10^9

Donc un ordre de grandeur de 802500×1995874561 est : $8 \times 10^5 \times 2 \times 10^9 = 16 \times 10^{14} = \boxed{1{,}6 \times 10^{15}}$

Exercice III

$\boxed{A} = \dfrac{6}{\sqrt{3}} = \dfrac{6 \times \sqrt{3}}{\sqrt{3} \times \sqrt{3}} = \dfrac{6\sqrt{3}}{3} = \boxed{2\sqrt{3}}$

Exercice IV

$n \in \mathbb{N}$ et $A(n) = \dfrac{9^n + 9^{n+1}}{(3^n)^2}$

a) $\boxed{A(0)} = \dfrac{9^0 + 9^1}{(3^0)^2} = \dfrac{1+9}{1^2} = \boxed{10}$ $\Big|\Big|$ $\boxed{A(1)} = \dfrac{9^1 + 9^2}{(3^1)^2} = \dfrac{9+81}{9} = \dfrac{90}{9} = \boxed{10}$

$\boxed{A(2)} = \dfrac{9^2 + 9^3}{(3^2)^2} = \dfrac{9^2 + 9^3}{9^2} = \dfrac{9^2}{9^2} + \dfrac{9^3}{9^2} = 1 + 9^{3-2} = 1+9 = \boxed{10}$

$\boxed{A(3)} = \dfrac{9^3 + 9^4}{(3^3)^2} = \dfrac{9^3 + 9^4}{(3^2)^3} = \dfrac{9^3 + 9^4}{9^3} = \dfrac{9^3}{9^3} + \dfrac{9^4}{9^3} = 1+9 = \boxed{10}$

b) Il semblerait que $A(n)$ soit égale à 10, quelle que soit la valeur de l'entier n.

c) $\boxed{A(n)} = \dfrac{9^n + 9^{n+1}}{(3^n)^2} = \dfrac{9^n(1+9)}{(3^2)^n} = \dfrac{9^n \times 10}{9^n} = \boxed{10}$: résultat indépendant de n : la conjecture du b) est donc valide pour tout entier n.

Exercice V

1) $\boxed{A} = \sqrt{147} = \sqrt{7 \times 21} = \sqrt{7 \times 7 \times 3} = \boxed{7\sqrt{3}}$

$\boxed{B} = \sqrt{8} \times \sqrt{56} = \sqrt{8} \times \sqrt{8 \times 7} = \sqrt{8} \times \sqrt{8} \times \sqrt{7} = \boxed{8\sqrt{7}}$

$\boxed{C} = 3\sqrt{3} - 2\sqrt{12} + \sqrt{300} = 3\sqrt{3} - 2\sqrt{4 \times 3} + \sqrt{100 \times 3} = 3\sqrt{3} - 2 \times 2\sqrt{3} + 10\sqrt{3} = 3\sqrt{3} - 4\sqrt{3} + 10\sqrt{3} = \boxed{9\sqrt{3}}$

2) $\boxed{A} = (1-\sqrt{3})^2 = 1 - 2 \times 1 \times \sqrt{3} + \sqrt{3}^2 = 1 - 2\sqrt{3} + 3 = \boxed{4 - 2\sqrt{3}}$

③

$B = (2\sqrt{6}+5\sqrt{2})^2 = (2\sqrt{6})^2 + 2\times 2\sqrt{6}\times 5\sqrt{2} + (5\sqrt{2})^2$

$B = 2^2\times\sqrt{6}^2 + 20\times\sqrt{3\times 2}\times\sqrt{2} + 5^2\times\sqrt{2}^2$

$B = 4\times 6 + 20\times\sqrt{2}\times\sqrt{2}\times\sqrt{3} + 25\times 2$

$\boxed{B} = 24 + 50 + 40\sqrt{3} = \boxed{74+40\sqrt{3}}$

$C = 7\sqrt{75} - 2\sqrt{48}$

$C = 7\sqrt{25\times 3} - 2\sqrt{16\times 3}$

$C = 7\times\sqrt{25}\times\sqrt{3} - 2\times\sqrt{16}\times\sqrt{3}$

$\boxed{C} = 35\sqrt{3} - 8\sqrt{3} = \boxed{27\sqrt{3}}$

3) $AB = \sqrt{200} - \sqrt{98}$

$AB = \sqrt{100\times 2} - \sqrt{49\times 2}$

$\boxed{AB} = 10\sqrt{2} - 7\sqrt{2} = \boxed{3\sqrt{2}}$

$BC = \dfrac{\sqrt{350}}{\sqrt{7}} - \sqrt{8} = \sqrt{\dfrac{350}{7}} - \sqrt{8} = \sqrt{50} - \sqrt{8}$

$\boxed{BC} = \sqrt{25\times 2} - \sqrt{4\times 2} = 5\sqrt{2} - 2\sqrt{2} = \boxed{3\sqrt{2}}$

Ainsi, le rectangle ABCD a deux côtés consécutifs de même longueur ($AB = BC = 3\sqrt{2}$ cm). Donc c'est un carré.

4) $B = (\sqrt{a}+\sqrt{b})^2 = (\sqrt{a})^2 + 2\times\sqrt{a}\times\sqrt{b} + (\sqrt{b})^2$

$\boxed{B} = a + 2\sqrt{ab} + b = \boxed{a+b+2\sqrt{ab}}$

$C = (\sqrt{a} - 3\sqrt{b})^2$

$C = \sqrt{a}^2 - 2\times\sqrt{a}\times 3\sqrt{b} + (3\sqrt{b})^2$

$\boxed{C} = a - 6\sqrt{ab} + 9b = \boxed{a+9b-6\sqrt{ab}}$

$D = (\sqrt{2a}-\sqrt{3b})(\sqrt{2a}+\sqrt{3b})$

$\boxed{D} = (\sqrt{2a})^2 - (\sqrt{3b})^2 = \boxed{2a-3b}$

$E = (5a^7+2b^3)^2 = (5a^7)^2 + 2\times 5a^7\times 2b^3 + (2b^3)^2$

$\boxed{E} = \boxed{25a^{14} + 20a^7b^3 + 4b^6}$

5) $E = \sqrt{666666^2 - 444444^2 - 222222^2} = \sqrt{(3\times 222222)^2 - (2\times 222222)^2 - 222222^2}$

$E = \sqrt{3^2\times 222222^2 - 2^2\times 222222^2 - 222222^2} = \sqrt{(3^2-2^2-1)\times 222222^2} = \sqrt{\underbrace{(9-4-1)}_{4}\times 222222^2}$

$\boxed{E} = \sqrt{4}\times\sqrt{222222^2} = 2\times 222222 = \boxed{444444}$

Exercice VI Exercice VII

Supposons que B mente : alors son affirmation est fausse, donc son contraire est vrai donc B serait le plus petit.

D qui dit vrai serait lui aussi le plus petit. Contradiction au fait qu'il y a un seul plus petit parmi les quatre.

Conclusion : B dit vrai.

Si C dit vrai : alors A aussi et par suite A, B, C, D devraient vrai : impossible car un ment.

Donc C ment (et n'est donc lui le plus grand car le contraire de son affirmation est vrai)

Exercice VII

$$E = \sqrt{\frac{a+\sqrt{b}}{a-\sqrt{b}}} + \sqrt{\frac{a-\sqrt{b}}{a+\sqrt{b}}}$$

$$E = \sqrt{\frac{(a+\sqrt{b})^2}{(a-\sqrt{b})(a+\sqrt{b})}} + \sqrt{\frac{(a-\sqrt{b})^2}{(a-\sqrt{b})(a+\sqrt{b})}}$$

$$E = \frac{\sqrt{(a+\sqrt{b})^2}}{\sqrt{a^2-b}} + \frac{\sqrt{(a-\sqrt{b})^2}}{\sqrt{a^2-b}}$$

$$E = \frac{a+\sqrt{b} + a-\sqrt{b}}{\sqrt{a^2-b}} \quad \text{car } a+\sqrt{b}>0 \text{ et } a-\sqrt{b}>0$$

$$\boxed{E = \frac{2a}{\sqrt{a^2-b}}}$$

Avec a =6 et b = 2 on obtient le résultat voulu : $\frac{12}{\sqrt{34}} = \frac{12\sqrt{34}}{34} = \frac{6\sqrt{34}}{17}$