***Exercice I***

1) $g(x) = f(-x)$

donc $g'(x) = -1 \times f'(-x) = -f'(-x)$ rappel : $\big(f(u(x))\big)' = u'(x) \times f'(u(x))$.

$h(x) = f(2x)$

donc $h'(x) = 2 \times f'(2x)$

$k(x) = f(x-2)$

$k'(x) = 1 \times f'(x-2) = f'(x-2)$.

2) $f'(-1) =$ coefficient directeur de la droite rouge (tangente à $\mathcal{C}_f$ en $A(-1;1)$) :

Cette droite passe par $A(-1;1)$ et $B(0;10)$.

donc son coefficient directeur $m = \dfrac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \dfrac{10-1}{0-(-1)} = 9$.

Donc $\boxed{f'(-1) = 9}$

De même, $f'(1) =$ coeff. directeur de la droite bleue tangente à $\mathcal{C}_f$ en $C(1;3)$.

Cette droite passe aussi par $D(2;0)$, donc $f'(1) = \dfrac{y_D - y_C}{x_D - x_C} = \dfrac{0-3}{2-1} = \dfrac{-3}{1} = -3$

3) Grâce à 1) et 2) :

$$\begin{cases} g'(-1) = -f'(-(-1)) = -f'(1) = -(-3) = 3 \\ g'(1) = -f'(-1) = -9 \\ h'(0{,}5) = 2 \times f'(2 \times 0{,}5) = 2f'(1) = 2 \times (-3) = -6 \\ k'(1) = f'(1-2) = f'(-1) = 9. \end{cases}$$

***<u>Exercice II</u>***

$\forall x\in\mathbb{R}$, $f(x)=e^{-x^2}$,

1) $f$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ (composée de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$).

$f(x)=e^{-x^2}=e^{u(x)}$ avec : $\begin{cases}u(x)=-x^2\\ u'(x)=-2x\end{cases}$.

Donc $f'(x)=u'(x)e^{u(x)}=-2xe^{-x^2}$.

Or, $\forall x\in\mathbb{R}$, $e^{-x^2}>0$, donc <u>$f'(x)$ a le même signe que $-2x$.</u>

Ainsi, $\boxed{f'(x)\geq 0 \text{ équivaut à } -2x\geq 0\text{, c'est à dire } x\leq 0}$ → c.a.d $x\in\,]-\infty;0]$ !

Contrairement à ce que je lis encore trop fréquemment dans vos copies, $-2x$ n'est pas une quantité négative pour tout réel $x$ ! Prenez $x=-1$ : $-2x=-2\times(-1)=2$.
Attention à cette erreur tenace !

Ainsi :

| $x$ | $-\infty$ | | $0$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | | $+$ | $0$ | $-$ | |
| $f(x)$ | | ↗ | $1$ | ↘ | |

$f(0)=e^0=1$

2) a) $g(x)=e^{-x^2}-x^2-1$ avec $x\in\mathbb{R}$. $g(x)=f(x)-x^2-1$ où $f$ est la fonction de la q-1

$g'(x)=f'(x)-2x=-2xe^{-x^2}-2x=-2xe^{-x^2}-2x\times 1$

$\boxed{g'(x)\overset{\text{factorisation}}{=}-2x\left(e^{-x^2}+1\right)}$

b) $\forall x\in\mathbb{R}$, $e^{-x^2}>0$, donc $e^{-x^2}+1>1>0$. Donc <u>$g'(x)$ a même signe que $-2x$.</u>

Ainsi : $g'(x)\geq 0 \iff -2x\geq 0 \iff x\leq 0$.

D'où :

| $x$ | $-\infty$ | | $0$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $g'(x)$ | | $+$ | $0$ | $-$ | |
| $g(x)$ | | ↗ | $0$ | ↘ | |

$g(0)=e^0-0-1=1-1=0$

c) Grâce à q.b) $g$ admet pour maximum $0$ sur $\mathbb{R}$.

Ainsi (déf. d'un maximum), <u>$\forall x\in\mathbb{R}$</u>, $g(x)\leq 0$ c'est à dire : $e^{-x^2}-x^2-1\leq 0$

Donc $\boxed{e^{-x^2}\leq x^2+1}$

<u>Donc $\mathcal{C}$ est située sous la parabole d'équation $y=x^2+1$ et $O(0;0)$ est commun à ces deux courbes.</u>

***Exercice III***

a) $f$ définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = (x^2-5x)^4$

$f = u^4$ avec : $\begin{cases} u(x) = x^2-5x \\ u'(x) = 2x-5 \end{cases}$

$f' = 4u'u^3$

donc $\boxed{f'(x) = 4(2x-5)(x^2-5x)^4}$

b) $g$ définie sur $\mathbb{R}$ par : $g(x) = e^{3x^2-1}$

$g = e^u$ où $u$ est définie sur $\mathbb{R}$ par : $\begin{cases} u(x) = 3x^2-1 \\ u'(x) = 6x \end{cases}$

$g' = u'e^u$ donc $\boxed{g'(x) = 6x e^{3x^2-1}}$

c) $h_1(x) = \sqrt{x^2+4} = \sqrt{u(x)}$ avec : $\begin{cases} u(x) = x^2+4 \\ u'(x) = 2x \end{cases}$

$\boxed{h_1'(x)} = \dfrac{u'(x)}{2\sqrt{u(x)}} = \dfrac{2x}{2\sqrt{x^2+4}} = \boxed{\dfrac{x}{\sqrt{x^2+4}}}$

$h(x) = \dfrac{4x}{\sqrt{x^2+4}} = \dfrac{4x}{h_1(x)} = \dfrac{u(x)}{h_1(x)}$ avec : $\begin{cases} u(x) = 4x \\ u'(x) = 4 \end{cases}$

$h'(x) = \dfrac{u'(x)h_1(x) - u(x)h_1'(x)}{(h_1(x))^2} = \dfrac{4\sqrt{x^2+4} - 4x \times \frac{x}{\sqrt{x^2+4}}}{\left(\sqrt{x^2+4}\right)^2}$ $\dfrac{\frac{4\left(\sqrt{x^2+4}\right)^2 - 4x^2}{\sqrt{x^2+4}}}{x^2+4}$

$\boxed{h'(x)} = \dfrac{4(x^2+4)-4x^2}{(x^2+4)\sqrt{x^2+4}} = \boxed{\dfrac{16}{(x^2+4)\sqrt{x^2+4}}}$

*d)*

$i(x) = xe^{-x} = u(x)v(x)$ avec : $\begin{cases} u(x) = x \\ u'(x) = 1 \end{cases}$ $\begin{cases} v(x) = e^{-x} \\ v'(x) = -e^{-x} \end{cases}$

$i'(x) = u'(x)v(x) + u(x)v'(x)$

$i'(x) = e^{-x} + x\times(-e^{-x}) = e^{-x} - xe^{-x}$

$i'(x) = e^{-x}(1-x) = (-x+1)e^{-x}$.

e) $j(x) = e^{\frac{-2x+1}{4x-4}}$.

On pose u définie par : u(x) = $\frac{-2x+1}{4x-4}$, u'(x) = $\frac{-2(4x-4)-4(-2x+1)}{(4x-4)^2} = \frac{4}{(4(x-1))^2} = \frac{4}{4^2(x-1)^2} = \frac{1}{4(x-1)^2}$.

Par suite, j'(x)=u'(x)$e^{u(x)} = \frac{1}{4(x-1)^2}e^{\frac{-2x+1}{4x-4}}$.

2a) $f(x)=xe^{x^2}$, $x\in\mathbb{R}$.

$f$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ en tant que produit et composée de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$.

$f=uv$ avec : $\begin{cases} u(x)=x \\ u'(x)=1 \end{cases}$ $\begin{cases} v(x)=e^{x^2} \\ v'(x)=2xe^{x^2} \end{cases}$ $(e^w)'=w'e^w$ (rappel).

$f'=u'v+uv'$, donc $\boxed{f'(x)}=e^{x^2}+x\times 2xe^{x^2}=\boxed{e^{x^2}(1+2x^2)}$.

Or, $\forall x\in\mathbb{R}$, $e^{x^2}>0$ et $x^2\geq 0$, donc $2x^2+1\geq 1>0$, donc $\forall x\in\mathbb{R}$, $f'(x)>0$ : $f$ est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

2b) Notons $T_A$ la tangente à $\mathcal{C}_f$ en son point d'abscisse $-1$ et $T_B$ la tangente à $\mathcal{C}_f$ en son point d'abscisse $1$.

$T_A$ a pour coefficient directeur $f'(-1)=e(1+2)=3e$. $(-1)^2=1$ !

$T_B$ a pour coefficient directeur $f'(1)=e(1+2)=3e$

<u>$T_A$ et $T_B$ ont le même coefficient directeur, donc $T_A \parallel T_B$</u> : <u>l'affirmation est donc vraie.</u>

**<u>Exercice IV</u>**

a) Si la courbe tracée est celle de $f$, $f$ est convexe sur $\mathbb{R}$ (courbe au-dessus de chacune de ses tangentes).

b) Si la courbe tracée est celle de $f'$ :

| $x$ | $-\infty$ | | $1$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | | $\searrow$ | | $\nearrow$ | |

Par critère du cours, $f'$ décroît sur $]-\infty;1]$, donc $f$ est concave sur $]-\infty;1]$.

$f'$ croît sur $[1;+\infty[$, donc $f$ est convexe sur $[1;+\infty[$.

c) Si la courbe tracée est celle de $f''$. Par lecture graphique de signe :

| $x$ | $-\infty$ | | $-1$ | | $3$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f''(x)$ | | $+$ | $0$ | $-$ | $0$ | $+$ | |

Par critère du cours $f''$ est à valeurs négatives sur $[-1;3]$ donc $f$ est concave sur $[-1;3]$

$f''$ est à valeurs positives sur chacun des intervalles $]-\infty;-1]$ et $[3;+\infty[$ donc $f$ est convexe sur chacun de ces intervalles.

## Exercice V

$f_m(x) = 10x^2 e^{mx-1}$

$f_m$ est deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$

$(e^{mx-1})' = m e^{mx-1}$.

$f_m'(x) = 20x e^{mx-1} + 10x^2 \times m e^{mx-1}$ (dérivé d'un produit).

$f_m'(x) = (20x + 10mx^2) e^{mx-1}$

de même : $f_m''(x) = (20 + 20mx) e^{mx-1} + (20x + 10mx^2) \times m e^{mx-1}$

$f_m''(x) = (20 + 20mx + 20mx + 10m^2x^2) e^{mx-1}$

$\boxed{f_m''(x)} = (10m^2x^2 + 40mx + 20) e^{mx-1} = \boxed{10(m^2x^2 + 4mx + 2) e^{mx-1}}$

$10 > 0$ et $\forall x \in \mathbb{R}$, $e^{mx-1} > 0$, donc $f_m''(x)$ a le même signe que $m^2x^2 + 4mx + 2$ qui est un trinôme en $x$. (vu que $m \in \mathbb{N}^*$).

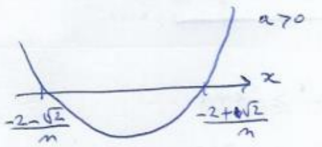
$a = m^2$ ; $b = 4m$ ; $c = 2$

$\Delta = b^2 - 4ac = (4m)^2 - 4 \times m^2 \times 2 = 16m^2 - 8m^2 = 8m^2$.

$m \in \mathbb{N}^*$, donc $m > 0$, donc $\Delta > 0$ donc ce trinôme a deux racines :

$$\begin{cases} x_1 = \dfrac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \dfrac{-4m - \sqrt{8m^2}}{2m^2} = \dfrac{-4m - 2\sqrt{2}m}{2m^2} \\ x_2 = \dfrac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \dfrac{-4m + 2\sqrt{2}m}{2m^2} \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_1 = \dfrac{-2m(2 + \sqrt{2})}{2m^2} = \dfrac{-(2 + \sqrt{2})}{m} = \dfrac{-2 - \sqrt{2}}{m} \\ x_2 = \dfrac{2m(-2 + \sqrt{2})}{2m^2} = \dfrac{-2 + \sqrt{2}}{m} \end{cases}$$




Ainsi, $f_m''$ s'annule en changeant de signe en $x_1 = \dfrac{-2 - \sqrt{2}}{m}$ et $x_2 = \dfrac{-2 + \sqrt{2}}{m}$.

À ce titre, $\mathcal{C}_m$ admet donc deux points d'inflexion en ses points d'abscisses respectives : $\dfrac{-2 - \sqrt{2}}{m}$ et $\dfrac{-2 + \sqrt{2}}{m}$.

## Exercice VI

$f$ est définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = 2x + 3 - e^x$.

$f$ est deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$, et $f'(x) = 2 - e^x$ et $f''(x) = -e^x$.

Or, $\forall x \in \mathbb{R}$, $e^x > 0$, donc $-e^x < 0$, donc $\forall x \in \mathbb{R}$, $f''(x) < 0$.

Ainsi $f$ est concave sur $\mathbb{R}$, et à ce titre, $\mathcal{C}_f$ est situé au-dessous de chacune de ses tangentes.

**Exercice VII**

$\forall x \in \mathbb{R},\ g(x) = e^{-x} + 3x^4$

a) $g$ est deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$, et $g'(x) = -e^{-x} + 12x^3$ (*)

$$g''(x) = e^{-x} + 36x^2.$$

Or, $\forall x \in \mathbb{R}$, $e^{-x} > 0$ et $36x^2 \geq 0$, donc $\forall x \in \mathbb{R}$, $g''(x) > 0$ et donc $\forall x \in \mathbb{R}$, $g''(x) \geq 0$.

Par critère de convexité du cours, $\boxed{g \text{ est convexe sur } \mathbb{R}}$.

b) Notons A le point de $\mathcal{C}_g$ d'abscisse 0 : $A(0\,;g(0))$ avec $g(0) = e^0 + 3 \times 0^4 = 1$, donc $A(0\,;1)$.
et $T_A$ la tangente à $\mathcal{C}_g$ en A :

$T_A$ a pour équation réduite : $y = g'(0)(x-0) + g(0)$ avec : $g'(0) \overset{(*)}{=} -e^0 + 12 \times 0^3 = -1$

$g(0) = 1$

$$y = -x + 1$$

c) Vu que $g$ est convexe sur $\mathbb{R}$, $\mathcal{C}_g$ est situé AU-DESSUS de chacune de ses tangentes.
En particulier, $\mathcal{C}_g$ est situé au-dessus de $T_A$, donc :

$\forall x \in \mathbb{R}$, $g(x) \geq -x + 1$, c'est à dire : $\forall x \in \mathbb{R}$, $e^{-x} + 3x^4 \geq -x + 1$

ou encore : $\forall x \in \mathbb{R}$, $\underbrace{e^{-x} + 3x^4 + x - 1}_{= f(x) \text{ (énoncé !)}} \geq 0$

Ainsi, $\boxed{\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) \geq 0, \text{ donc } \mathcal{C}_g \text{ est situé au-dessus de l'axe des abscisses.}}$

**Exercice VIII**

$x \in [0\,;+\infty[$ et $f(x) = \dfrac{k}{1 + e^{-r(x-a)}} = k \times \dfrac{1}{1 + e^{-r(x-a)}} = k \times \dfrac{1}{v(x)}$

① avec : $v(x) = 1 + e^{-r(x-a)} = 1 + e^{u(x)}$ où $\begin{cases} u(x) = -r(x-a) \\ u'(x) = -r \end{cases}$

donc $v'(x) = 0 + u'(x)e^{u(x)} = u'(x)e^{u(x)}$

$v'(x) = -re^{-r(x-a)}$

donc : $\boxed{f'(x)} = k \times \dfrac{(-v'(x))}{v^2(x)} = \dfrac{k \times re^{-r(x-a)}}{\left(1 + e^{-r(x-a)}\right)^2} = \boxed{\dfrac{kre^{-r(x-a)}}{\left(1 + e^{-r(x-a)}\right)^2}}$

Vu que $k > 0$, $r > 0$ et que la fonction exponentielle est à valeurs strictement positives, il en résulte que $kre^{-r(x-a)} > 0$ et $\left(1 + e^{-r(x-a)}\right)^2 > 0$.

donc, $\boxed{\forall x \in [0\,;+\infty[,\ f'(x) > 0 : f \text{ est strictement croissante sur } [0\,;+\infty[.}$

**3.** La fonction $f'$ est dérivable sur l'intervalle $[0\,;+\infty[$ et pour tout réel $x \geqslant 0$,

$$f''(x)=\frac{-Kr^2e^{-r(x-a)}\times(1+e^{-r(x-a)})^2-Kr^2e^{-r(x-a)}\times 2(1+e^{-r(x-a)}\times(-re^{-r(x-a)})}{(1+e^{-r(x-a)})^4}$$

$$f''(x)=\frac{-Kr^2e^{-r(x-a)}\times(1+e^{-r(x-a)})+2Kr^2(e^{-r(x-a)})^2}{(1+e^{-r(x-a)})^3}$$

$$f''(x)=\frac{Kr^2e^{-r(x-a)}(-1-e^{-r(x-a)}+2e^{-r(x-a)})}{(1+e^{-r(x-a)})^3}$$

$$f''(x)=\frac{Kr^2e^{-r(x-a)}(e^{-r(x-a)}-1)}{(1+e^{-r(x-a)})^3}$$

Pour tout réel $x \geqslant 0$ $Kr^2e^{-r(x-a)} \geqslant 0$ et $(1+e^{-r(x-a)})^3>0$, $f''(x)$ est donc du signe de $e^{-r(x-a)}-1$.

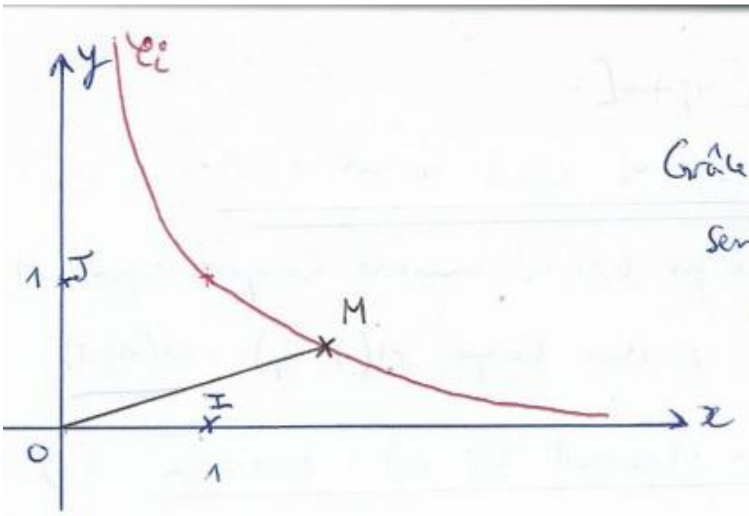
$e^{-r(x-a)}-1 \geqslant 0$ équivaut à $e^{-r(x-a)} \geqslant e^0$, $-r(x-a)\geqslant 0$ ou encore $x-a \leqslant 0$ et $x \leqslant a$.

Ainsi :

| $x$ | $0$ | | $a$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f''(x)$ | | $+$ | $0$ | $-$ | |

La fonction $f$ est donc convexe sur l'intervalle $[0\,;a]$ et concave sur l'intervalle $[a\,;+\infty[$.

**Exercice IX**




Grâce à Geogebra, la distance OM semble être minimale lorsque M(1;1) et vaudrait environ 1,414 unité de longueur.

② Soit $x$ l'abscisse du point $M$, avec $x > 0$.

Vu que $M \in \mathcal{C}_i$ où $i(x) = \frac{1}{x}$, $M(x\,;\,\frac{1}{x})$.

Vu que le repère est ORTHONORMÉ, $OM = \sqrt{(x_M - x_0)^2 + (y_M - y_0)^2} = \sqrt{x^2 + \left(\frac{1}{x}\right)^2}$ car $x_0 = y_0 = 0$.

donc $OM = \sqrt{x^2 + \frac{1}{x^2}}$

Définissons, sur $]0;+\infty[$, la fonction $f$ par : $f(x) = \sqrt{x^2 + \frac{1}{x^2}} = \sqrt{u(x)}$ où $u(x) = x^2 + \frac{1}{x^2}$

$f$ est dérivable sur $]0;+\infty[$ en tant que composée de fonctions dérivables sur $]0;+\infty[$ et que la fonction $u$ est à valeurs strictement positives.

donc $\forall x \in ]0;+\infty[$, $f'(x) = \dfrac{u'(x)}{2\sqrt{u(x)}}$ avec $\begin{cases} u(x) = x^2 + \frac{1}{x^2} \\ u'(x) = 2x + \left(\frac{-2x}{(x^2)^2}\right) = 2x - \frac{2}{x^3} \end{cases}$

(!) dérivée de $\frac{1}{v}$ : $\left(\frac{1}{v}\right)' = \frac{-v'}{v^2}$

$$f'(x) = \frac{2x - \frac{2}{x^3}}{2\sqrt{x^2 + \frac{1}{x^2}}} = \frac{2x^4 - 2}{2x^3\sqrt{x^2 + \frac{1}{x^2}}} = \frac{2(x^4 - 1)}{2x^3\sqrt{x^2 + \frac{1}{x^2}}}$$

$$f'(x) = \frac{x^4 - 1}{x^3\sqrt{x^2 + \frac{1}{x^2}}} = \frac{(x^2)^2 - 1^2}{x^3\sqrt{x^2 + \frac{1}{x^2}}} = \frac{(x^2+1)(x^2-1)}{x^3\sqrt{x^2 + \frac{1}{x^2}}} = \frac{(x^2+1)(x+1)(x-1)}{x^3\sqrt{x^2 + \frac{1}{x^2}}}$$

Or $x > 0$, donc $x + 1 > 0$, $x^3 > 0$, $\sqrt{x^2 + \frac{1}{x^2}} > 0$ et $x^2 + 1 > 0$.

Donc $f'(x)$ a le même signe que $x - 1$ de sorte que $f'(x) \geqslant 0$ équivaut à $x - 1 \geqslant 0$

Donc à $x \geqslant 1$.

D'où :

| $x$ | $0$ | | $1$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | $\|\|$ | $-$ | $0$ | $+$ | |
| $f(x)$ | $\|\|$ | $\searrow$ | $\sqrt{2}$ | $\nearrow$ | |

$f(1) = \sqrt{1^2 + \frac{1}{1^2}} = \sqrt{2}$

$f$ décroît sur $]0;1]$ et croît sur $[1;+\infty[$.

donc $f$ admet un minimum sur $]0;+\infty[$ atteint lorsque $x = 1$.

Comme $OM = f(x)$, il en résulte que $OM$ est minimale lorsque le point $M$ de la courbe $\mathcal{C}_i$ a pour abscisse $1$, et donc lorsque $M(1\,;\,\frac{1}{1})$ : $M(1\,;1)$.

La valeur minimale de $OM$ lorsque $M$ parcourt $\mathcal{C}_i$ est : $OM = \sqrt{2}$ (cf. tableau de variation).

Le point $M(1;1)$ est donc le point de $\mathcal{C}_i$ à être le plus proche de $O$.