

Seconde

Corrigé du DM2

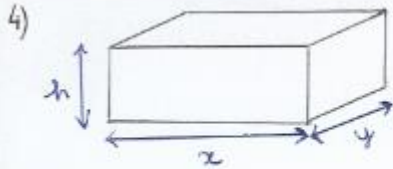
Exercice I

1) $(x-y)^2$

2) $x^2 + \frac{y}{3}$

3) $xy - (x+y)$

4) $(x-y)^2 + 2xy$



Un pavé droit est formé de six rectangles.
Les rectangles qui se font face sont identiques.

Donc en notant A l'aire totale de ces six faces, on a:

$$A = 2xy + 2xh + 2hy = 2(xy + xh + hy)$$

Exercice II

$$A = 6(2x-1) + (2x+1)(x-3)$$

$$A = 12x - 6 + 2x^2 - 6x + x - 3$$

$$A = 2x^2 + 7x - 9$$

$$B = (-3x+2)(-x-2) - (x+5)(x-4)$$

$$B = 3x^2 + 6x - 2x - 4 - (x^2 - 4x + 5x - 20)$$

$$B = 3x^2 + 4x - 4 - (x^2 + x - 20)$$

$$B = 3x^2 + 4x - 4 - x^2 - x + 20 = 2x^2 + 3x + 16$$

$$C = 3(2ab - 4ab^2)ab^2 = 3ab^2(2ab - 4ab^2) = 3ab^2 \times 2ab - 3ab^2 \times 4ab^2$$

$$C = 3 \times 2 \times a \times a \times b^2 \times b - 3 \times 4 \times a \times a \times b^2 \times b^2$$

$$C = 6a^2b^3 - 12a^2b^4$$

$$D = (7x - 2y)^2 + (3x + 4y)^2$$

$$D = (7x)^2 - 2 \times 7x \times 2y + (2y)^2 + (3x)^2 + 2 \times 3x \times 4y + (4y)^2 = 49x^2 - 28xy + 4y^2 + 9x^2 + 24xy + 16y^2$$

$$D = 58x^2 - 4xy + 20y^2$$

2)

$$E = 2x^2 - x = x(2x - 1) \quad F = 4x - 16 = 4(x - 4) \quad G = x^2 - 14x + 49 = x^2 - 2 \times x \times 7 + 7^2 = (x - 7)^2$$

$$H = 6x + 14 + (3x + 7)^2$$

$$H = 2(3x + 7) + (3x + 7)(3x + 7)$$

$$H = (3x + 7)(2 + 3x + 7)$$

$$H = (3x + 7)(3x + 9) = 3(x + 3)(3x + 7)$$

$$I = (3x + 5)^2 - (x - 8)^2$$

$$I = (3x + 5 + x - 8)(3x + 5 - (x - 8))$$

$$I = (4x - 3)(3x + 5 - x + 8) = (4x - 3)(2x + 13)$$

$$\begin{aligned}
 J &= (x-3)^2 - 16 + (x+1)(x+2) \\
 J &= (x-3)^2 - 4^2 + (x+1)(x+2) \\
 J &= (x-3+4)(x-3-4) + (x+1)(x+2) \\
 J &= (x+1)(x-7) + (x+1)(x+2) \\
 J &= (x+1)(x-7+x+2) = (x+1)(2x-5)
 \end{aligned}$$

$$K = x^2 - \frac{4}{9}a^2 = x^2 - \left(\frac{2}{3}a\right)^2$$

$$K = \left(x + \frac{2}{3}a\right)\left(x - \frac{2}{3}a\right)$$

$$L = 10^{n+1} + 10^n = 10^n \times 10 + 10^n \times 1 = 10^n \times (10+1) = 11 \times 10^n.$$

$$M = x^3 + x^2 + x + 1 = x^2(x+1) + (x+1) = (x+1)(x^2+1).$$

$$N = 5x(4x-1) + 16x^2 - 1 = 5x(4x-1) + (4x-1)(4x+1) = (4x-1)(5x+4x+1) = (4x-1)(9x+1).$$

$$\begin{aligned}
 2) \quad (x^2+2)^2 &= (x^2)^2 + 2 \times x^2 \times 2 + 2^2 = x^4 + 4x^2 + 4. \\
 \text{Grâce à ça :} \quad x^4 + 4 &= (x^2+2)^2 - 4x^2 = (x^2+2)^2 - (2x)^2 = (x^2+2+2x)(x^2+2-2x) \\
 \text{Donc} \quad x^4 + 4 &= (x^2+2x+2)(x^2-2x+2)
 \end{aligned}$$

Exercice III

a) Si le chiffre des unités de N est égal à 5, alors celui de $N - 5$ vaut 0, donc $N - 5$ est un multiple de 10, donc il existe un entier naturel noté d tel que : $N - 5 = 10d$, et donc $N = 10d + 5$.

Concrètement d représente le nombre de dizaines contenues dans N .

$$b) N = 10d + 5, \text{ donc } N^2 = (10d + 5)^2 = 100d^2 + 2 \times 10d \times 5 + 5^2 = 100d^2 + 100d + 25.$$

$$\text{Donc } N^2 = 100d(d+1) + 25. \text{ (on a factorisé } 100d^2 + 100d = 100d \times d + 100d \times 1 = 100d(d+1) \text{).}$$

De là la façon de procéder de *Matt* est aisée : il cherche mentalement combien de dizaines sont contenues dans N , puis il multiplie ce nombre par son successeur.

Il ajoute deux zéro au résultat obtenu (multiplier par 100) et enfin ajoute 25 à ce dernier résultat.

Application : 95^2

95 contient 9 dizaines ; $9 \times 10 = 90$; $90 \times 100 = 9000$; $9000 + 25 = 9025$ (toutes ces étapes sont mentales).

$$\text{Donc } 95^2 = 9025$$

De même pour 165^2 : on fait $16 \times 17 = 272$, puis $272 \times 100 = 27200$ puis $27200 + 25 = 27225$.

Exercice IV

Par donnée, une seule affirmation dit vraie, donc quatre disent faux.

Supposons que l'or soit dans le coffre 1 (on fait un raisonnement par l'absurde):

Alors l'affirmation usitée sur le coffre 1 serait vraie, (Vu que le coffre contient l'or a son affirmation vraie), donc l'or serait en ② ou en ③ : IMPOSSIBLE, car deux coffres contiennent de l'or!

donc l'or n'est pas dans le coffre ①, par suite, l'affirmation usitée sur le coffre 1 est fautive, donc son contraire est vrai, à savoir l'or n'est ni dans le coffre ② ni dans le coffre ③. (X)

Il ne reste que les coffres ④ et ⑤ qui peuvent contenir l'or.

Si l'or était dans le coffre n°4, alors l'affirmation usitée sur le coffre ④ serait vraie, donc le nickel serait en ③, et donc l'affirmation usitée sur le coffre ③ serait vraie et donc l'or serait en ③ ce qui est impossible (déjà vu en (X)).

donc l'or n'est pas dans le coffre ④.

Par suite, l'or est dans le coffre ⑤ et l'affirmation ⑤ est vraie,

l'affirmation ③ est fautive, donc le Bronze est dans le coffre 3.

} donc l'Argent est dans le coffre ④.

Exercice V

1)

$$\text{Aire}(AMNCD) = \text{Aire}(ABCD) - \text{Aire}(MBN)$$

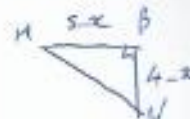
$$\text{Aire}(AMNCD) = 4 \times 5 - \frac{(5-x)(4-x)}{2}$$

$$\text{Aire}(AMNCD) = 20 - \frac{(20-5x-4x+x^2)}{2}$$

$$\text{Aire}(AMNCD) = \frac{40}{2} - \frac{(20-9x+x^2)}{2}$$

$$\text{Aire}(AMNCD) = \frac{40-20+9x-x^2}{2} = \frac{-x^2+9x+20}{2} = -\frac{1}{2}x^2 + \frac{9}{2}x + \frac{10}{1} = -\frac{1}{2}x^2 + \frac{9}{2}x + 10$$

⚠ Ce triangle MBN n'a pas les mêmes dimensions que celui de la figure ③! regarde bien le codage!



2) Le périmètre d'un cercle de rayon R est $2\pi R$.

Notons P_p le périmètre du petit demi-cercle de diamètre x , et donc de rayon $\frac{x}{2}$:

$$P_p = \frac{1}{2} \times 2\pi \times \frac{x}{2} = \frac{\pi x}{2}$$

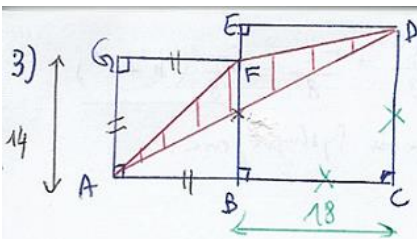
De même, en notant P_m le périmètre du demi-cercle de diamètre $10-x$:

$$P_m = \frac{1}{2} \times 2\pi \times \left(\frac{10-x}{2}\right) = \frac{\pi}{2}(10-x)$$

et notant P_g le périmètre du grand demi-cercle de diamètre 10, et de rayon 5: $P_g = \frac{1}{2} \times 2\pi \times 5 = 5\pi$

$$\text{Donc } P_{\text{coloré}} = \frac{\pi x}{2} + \frac{\pi}{2}(10-x) + 5\pi = \frac{\pi x}{2} + \frac{\pi}{2} \times 10 - \frac{\pi x}{2} + 5\pi = 5\pi + 5\pi = 10\pi$$

Le périmètre de la zone colorée vaut 10π et est donc indépendant de la valeur x .



Aire rouge = Aire des triangles AFD. \downarrow Notation $\hat{=}$ $A(AFD)$.

$$\text{OR, } A(AFD) = A(ABFG) + A(BCDE) - A(AGF) - A(ACD) - A(EFD)$$

$$\text{avec: } \left\{ \begin{array}{l} A(ABFG) = 14^2 = 196 \\ A(BCDE) = 18^2 = 324 \end{array} \right.$$

$$A(AGF) = \frac{AG \times GF}{2} = \frac{14 \times 14}{2} = \frac{196}{2} = 98$$

$$A(EFD) = \frac{18 \times (18-14)}{2} = \frac{18 \times 4}{2} = 16$$

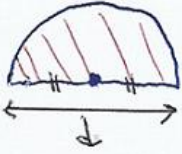
$$A(ACD) = \frac{AC \times CD}{2} = \frac{(14+18) \times 18}{2} = \frac{32 \times 18}{2} = 32 \times 9 = 288.$$

\uparrow $AC = AB + BC = 14 + 18 = 32$ car A, B, C sont aussi alignés.

$$\text{Donc } A(AFD) = 196 + 324 - 98 - 288 - 16$$

L'aire du triangle coloré est égale à 98 (unités d'aire).

4a)



Soit R le rayon du disque et d son diamètre : on a : $2R = d$
donc $R = \frac{d}{2}$.

L'aire d'un disque entier de rayon R est : $\pi R^2 = \pi \times \left(\frac{d}{2}\right)^2 = \frac{\pi d^2}{4}$.

Donc l'aire d'un demi-disque de diamètre d est : $\frac{1}{2} \times \frac{\pi d^2}{4} = \frac{\pi d^2}{8}$

4b) ABC est un triangle rectangle en A, avec $AC = b$ et $AB = c$.

Donc l'aire de ABC est : $\mathcal{A}(ABC) = \frac{AC \times AB}{2} = \frac{bc}{2}$.

Montrons que l'aire des lunules colorées est aussi égale à $\frac{bc}{2}$: Notons $\mathcal{A}(Z)$ l'aire colorée.

Notons $\mathcal{D}_a, \mathcal{D}_b, \mathcal{D}_c$ chacun des demi-disques de diamètre respectif a, b, c .

On a : $\mathcal{A}(Z) = \mathcal{A}(\mathcal{D}_b) + \mathcal{A}(\mathcal{D}_c) + \mathcal{A}(ABC) - \mathcal{A}(\mathcal{D}_a)$.

Établissons que $\mathcal{A}(\mathcal{D}_b) + \mathcal{A}(\mathcal{D}_c) - \mathcal{A}(\mathcal{D}_a) = 0$ et on aura bien : $\mathcal{A}(Z) = \mathcal{A}(ABC)$!
ou encore que : $\mathcal{A}(\mathcal{D}_a) = \mathcal{A}(\mathcal{D}_b) + \mathcal{A}(\mathcal{D}_c)$

Or, $\mathcal{A}(\mathcal{D}_a) = \frac{\pi a^2}{8}$ et $\mathcal{A}(\mathcal{D}_b) + \mathcal{A}(\mathcal{D}_c) = \frac{\pi b^2}{8} + \frac{\pi c^2}{8} = \frac{\pi}{8}(b^2 + c^2)$.

Or, le triangle ABC est rectangle en A, donc d'après le théorème de Pythagore, on a :

$$BC^2 = AC^2 + AB^2$$

donc $a^2 = b^2 + c^2$, et d'après (*) on a bien que : $\mathcal{A}(\mathcal{D}_a) = \mathcal{A}(\mathcal{D}_b) + \mathcal{A}(\mathcal{D}_c)$

et donc $\frac{\pi a^2}{8} = \frac{\pi}{8}(b^2 + c^2)$, donc $\frac{\pi a^2}{8} = \frac{\pi b^2}{8} + \frac{\pi c^2}{8}$.

Par suite, $\mathcal{A}(Z) = \underbrace{\mathcal{A}(\mathcal{D}_b) + \mathcal{A}(\mathcal{D}_c) - \mathcal{A}(\mathcal{D}_a)}_0 + \mathcal{A}(ABC)$

$$\mathcal{A}(Z) = \mathcal{A}(ABC)$$

4c) Le carré ABCD de 4cm de côté a pour aire $4^2 = 16 \text{ cm}^2$.

Une application du théorème de Pythagore permet facilement de déterminer le rayon du cercle dans lequel est inscrit le carré. On trouve après calculs $\sqrt{8} = 2\sqrt{2} \text{ cm}$.

A partir de là, on déduit que l'aire extérieure au carré est égale à : $\pi \times (2\sqrt{2})^2 - 16 = 8\pi - 16 \text{ cm}^2$.

$8\pi - 16 \approx 9,13$ qui est largement inférieur à 16.

Donc c'est le carré qui a la plus grande aire !