Terminale Maths Groupe 1 **Corrigé du DM1** **Septembre 2024**

Exercice I

1)

a) Les solutions de l'équation $f(x) = 0$ sont les abscisses des points d'intersection de la courbe représentant f et de l'axe des abscisses.

Ici, $f(x)=0$ lorsque : $x = -1$ ou $x = 1$ ou $x = 3$: $\mathscr{S} = \{-1\ ;\ 1\ ;\ 3\}$.

b) Les solutions de l'inéquation $f(x) \geqslant 0$ sont les abscisses de tous les points de la courbe représentant f qui sont situés au-dessus de l'axe des abscisses, en y incluant les abscisses des points d'intersection de la courbe représentant f et de l'axe des abscisses car symbole $\geqslant$!

Ici, $f(x) \geqslant 0$ équivaut à : $-1 \leqslant x \leqslant 1$ ou $3 \leqslant x \leqslant 4$: $\mathscr{S} = [-1\ ;\ 1] \cup [3\ ;\ 4]$.

Les solutions de l'inéquation $f(x) < 2$ sont les abscisses de tous les points de la courbe représentant f qui sont situés au-dessous de la droite d'équation $y = 2$.

Ici, $f(x) < 2$ équivaut à : $-4 \leqslant x < 3{,}7$. (3,7 étant une valeur approchée ici).

c) ♥ *$f'(x)$ est le coefficient directeur de la tangente à la courbe représentant f, notée C_f, en son point d'abscisse x* ♥ .

♥♥ *Dire que $f'(x)=0$ signifie qu'au point de C_f d'abscisse x, il y a une tangente parallèle à l'axe des abscisses (on dit tangente horizontale).* ♥♥

♥♥ *Résoudre l'équation $f'(x) = 0$ revient donc à chercher les abscisses des points de C_f en lesquels il y a une tangente horizontale.* ♥♥ *Ici, $f'(x) = 0$ équivaut à $x = 0$ ou $x = 2$: $\mathscr{S} = \{0\ ;\ 2\}$.*

d) $f'(-1)$ est le coefficient directeur de la tangente à C_f en son point d'abscisse -1.

On trace donc approximativement la tangente à C_f en son point d'abscisse -1, qui est ici le point nommé A de coordonnées : A$(-1\ ;0)$.

Manifestement, cette tangente passe par le point B$(-2\ ;\ -2)$.

Le coefficient directeur de cette tangente est m, avec : $\boxed{m} = f'(-1) = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \frac{-2-0}{-2-(-1)} = \frac{-2}{-1} = 2$.

e)

x	-2		0		2		4
Signe de $f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	-3	$\nearrow$	1	$\searrow$	-1	$\nearrow$	3

2a) Ici $g'(x)=0$ lorsque $\mathscr{C}_{g'}$ rencontre l'axe des abscisses.
$g'(x)=0$ a donc pour solutions : $x=-1$; $x=1$ et $x=3$: $\mathscr{S} = \{-1 ; 1 ; 3\}$.

2b)

x	-2		-1		1		3		4
Signe de $g'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
$g(x)$		$\searrow$		$\nearrow$		$\searrow$		$\nearrow$	

Exercice II

a) $f(x) = x^3 + 4x^2 + 5x - 11$

f est dérivable sur $\mathbb{R}$ en tant que somme de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$.

Pour tout réel x, $f'(x) = 3x^2 + 4 \times 2x + 5 = \underline{3x^2 + 8x + 5}$.

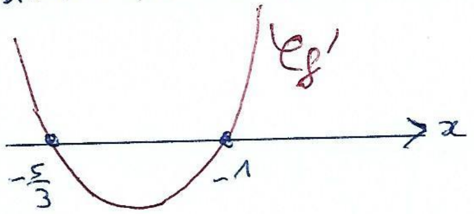
Etudions à présent le signe de $f'(x)$ sur $\mathbb{R}$:

$f'(x) = 3x^2 + 8x + 5$ est une fonction trinôme de la forme $f(x) = ax^2 + bx + c$

avec : $\begin{cases} a = 3 \\ b = 8 \\ c = 5 \end{cases}$. $\Delta = b^2 - 4ac = 8^2 - 4 \times 3 \times 5 = 64 - 60 = 4$.

$\Delta > 0$, donc ce trinôme admet deux racines réelles : $\begin{cases} x_1 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-8-\sqrt{4}}{6} = -\frac{10}{6} = -\frac{5}{3} \\ x_2 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-8+\sqrt{4}}{6} = -\frac{6}{6} = -1 \end{cases}$

Croquis : $a = 3$, donc $a > 0$ et $\mathcal{C}_{f'}$ est une parabole de la forme " branches tournées vers le haut " :



Par suite, sur $]-\frac{5}{3} ; -1[$, $\mathcal{C}_{f'}$ est située au-dessous de l'axe des abscisses, donc si $-\frac{5}{3} < x < -1$, alors $f'(x) < 0$, donc f décroît sur $]-\frac{5}{3} ; -1[$.

Sur chacun des intervalles $]-\infty ; -\frac{5}{3}]$ et $[-1 ; +\infty[$ on a $f'(x) \geq 0$, donc f croît sur $]-\infty ; -\frac{5}{3}]$ et f croît sur $[-1 ; +\infty[$.

d'où :

x	$-\infty$		$-\frac{5}{3}$		-1		$+\infty$
Signe de $f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$		$\nearrow$	$-\frac{347}{27}$	$\searrow$	-13	$\nearrow$	

$f(-1) = -13$

$f(-\frac{5}{3}) = -\frac{347}{27}$ (Calculatrice).

b) f est dérivable sur $\mathbb{R}$, donc f est dérivable en $a = \frac{1}{2}$.

Par suite, $\mathcal{C}_f$ admet en le point $A(\frac{1}{2} ; f(\frac{1}{2}))$ une tangente notée T_A dont l'équation réduite est : ♡ $y = f'(a)(x-a) + f(a)$ avec ici $a = \frac{1}{2}$ = abscisse du point A.

Or $\begin{cases} f\left(\frac{1}{2}\right) = \left(\frac{1}{2}\right)^3 + 4\times\left(\frac{1}{2}\right)^2 + 5\times\frac{1}{2} - 11 = \frac{1}{8} + 1 + \frac{5}{2} - 11 = \frac{1}{8} + \frac{8}{8} + \frac{20}{8} - \frac{88}{8} = \frac{-59}{8} \\ f'\left(\frac{1}{2}\right) = 3\times\left(\frac{1}{2}\right)^2 + 8\times\frac{1}{2} + 5 = 3\times\frac{1}{4} + 4 + 5 = \frac{3}{4} + 9 = \frac{3}{4} + \frac{36}{4} = \frac{39}{4}. \end{cases}$

<u>T_A a pour équation réduite</u> : $y = f'\left(\frac{1}{2}\right)\left(x - \frac{1}{2}\right) + f\left(\frac{1}{2}\right)$

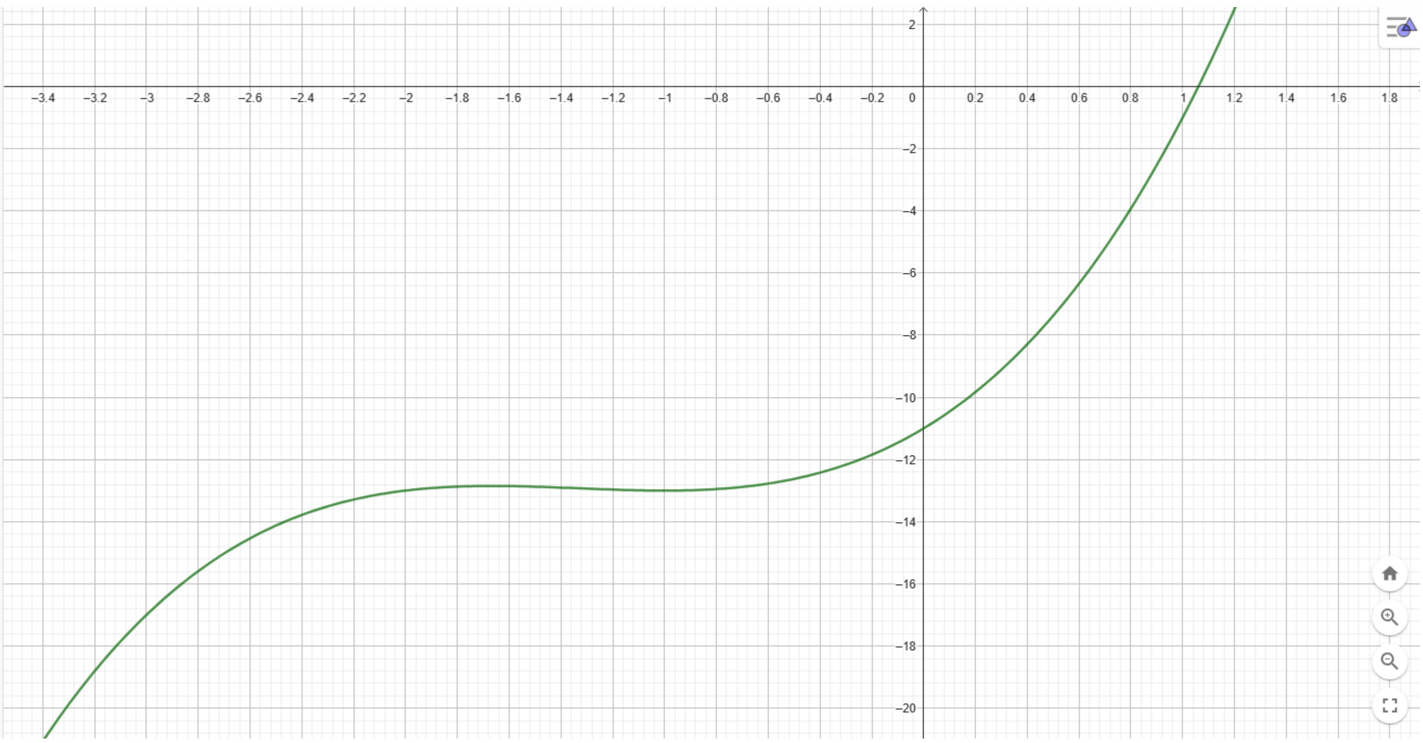
$$y = \frac{39}{4}\left(x - \frac{1}{2}\right) - \frac{59}{8}$$

$$y = \frac{39}{4}x - \frac{39}{8} - \frac{59}{8}$$

$$y = \frac{39}{4}x - \frac{20}{8}$$

$$\boxed{y = \frac{39}{4}x - \frac{15}{4}}$$

c)



<u>Exercice III</u>

$f(x) = \dfrac{ae^x}{be^x - 1}$.

1) Si $b = 1$, alors on aurait : $f(x) = \dfrac{ae^x}{e^x - 1}$.

OR, $e^x - 1 = 0$ équivaut à : $e^x = 1$ et $1 = e^0$, donc $e^x = e^0$ c'est à dire $x = 0$.

Par suite, le dénominateur de l'expression de $f(x)$ s'annulerait lorsque $x = 0$, donc f ne serait pas définie sur $\mathbb{R}$ mais sur $\mathbb{R}^*$, ce qui est contraire à la donnée de l'énoncé "f est définie sur $\mathbb{R}$".

Ainsi, $\boxed{b \neq 1}$

2) $f(x) = \dfrac{ae^x}{be^x - 1} = \dfrac{u(x)}{v(x)}$ avec : $\begin{cases} u(x) = ae^x \\ u'(x) = ae^x \end{cases}$ $\begin{cases} v(x) = be^x - 1 \\ v'(x) = be^x \end{cases}$

(a et b sont des constantes vis à vis de x on dérive donc des "multiples" de fonctions".

f est dérivable sur $\mathbb{R}$ en tant que quotient de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$ et :

♡ $f'(x) = \dfrac{u'(x)v(x) - u(x)v'(x)}{v^2(x)}$ ♡ (dérivée d'un quotient). ⚠ $u'v - uv' \neq uv' - u'v$ attention à l'ordre des termes dans une soustraction !

$\boxed{f'(x)} = \dfrac{ae^x(be^x - 1) - ae^x \times be^x}{(be^x - 1)^2} = \dfrac{\cancel{abe^x \times e^x} - ae^x - \cancel{abe^x \times e^x}}{(be^x - 1)^2} = \boxed{\dfrac{-ae^x}{(be^x - 1)^2}}$

3) ♡♡ $\boxed{\mathcal{C}_f \text{ passe par } K(0\,;2), \text{ donc } f(0) = 2}$. ♡♡

Or $f(x) = \dfrac{ae^x}{be^x - 1}$, donc $f(0) = \dfrac{ae^0}{be^0 - 1} = \dfrac{a \times 1}{b \times 1 - 1} = \dfrac{a}{b-1}$.

Par suite, $f(0) = 2$ équivaut à dire que : $\dfrac{a}{b-1} = 2$ ou encore $\boxed{a = 2(b-1)}$. (*)

La tangente à $\mathcal{C}_f$ en K passe par L, donc (KL) est la tangente à $\mathcal{C}_f$ en K.

Par le cours, le coefficient directeur de (KL) est donc le nombre dérivé de f en l'abscisse de K, à savoir 0 : $\boxed{f'(0)} = \dfrac{y_L - y_K}{x_L - x_K} = \dfrac{3-2}{1-0} = \boxed{1}$

OR d'après la question 2), $f'(x) = \dfrac{-ae^x}{(be^x - 1)^2}$ (pour tout réel x).

Donc $f'(0) = \dfrac{-ae^0}{(be^0 - 1)^2} = \dfrac{-a}{(b-1)^2}$ et donc : $\boxed{\dfrac{-a}{(b-1)^2} = 1}$ (**)

(*) et (**) donnent : $\begin{cases} a = 2(b-1) & (*) \\ \dfrac{-a}{(b-1)^2} = 1 & (**) \end{cases}$ ou encore : $\begin{cases} a = 2(b-1) \\ -a = (b-1)^2 \end{cases}$

Résolvons ce système : $\begin{cases} a = 2(b-1) \\ -2(b-1) = (b-1)^2 \end{cases} \iff \begin{cases} a = 2(b-1) \\ (b-1)^2 + 2(b-1) = 0 \end{cases}$

$\iff \begin{cases} a = 2(b-1) \\ (b-1)(b-1+2) = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} a = 2(b-1) \\ (b-1)(b+1) = 0. \end{cases} \iff \begin{cases} a = 2(b-1) \\ b+1 = 0 \end{cases}$

$b \neq 1$ (q.1), donc $b-1 \neq 0$, on peut donc simplifier la dernière égalité par $b-1$: on obtient : $b+1=0$

$\iff \begin{cases} b = -1 \\ a = 2(-1-1) = 2\times(-2) = -4. \end{cases}$

$\boxed{\mathcal{S} = \{(\underbrace{-4}_{a} ; \underbrace{-1}_{b})\}}$

En conclusion, pour tout réel x, $\boxed{f(x)} = \dfrac{-4e^x}{-e^x-1} = \dfrac{-4e^x}{-(e^x+1)} = \boxed{\dfrac{4e^x}{e^x+1}}$

Exercice IV

0*a*) On calcule $f(0)$: $f(0) = (0{,}04 \times 0^2 - 8 \times 0 + 400) \times e^{\frac{0}{50}} + 40 = 400e^0 + 40 = 440$. ♥ $e^0 = 1$. ♥

Il y avait 440 crapauds dans le lac au moment de l'introduction des truites.

0*b*) On calcule donc $f(50)$: $f(50) = (0{,}04 \times 50^2 - 8 \times 50 + 400) \times e^{\frac{50}{50}} + 40 = 100e + 40$, et avec une calculatrice on trouve que $f(50) \approx 311$. Il y avait donc environ 311 crapauds dans le lac 50 jours après l'introduction des truites.

1) $h(t) = e^{at+b}$ se dérive en : $h'(t) = ae^{at+b}$.

2) $f(t) = (0{,}04 \times t^2 - 8 \times t + 400) \times e^{\frac{0t}{50}} + 40$ est écrite sous la forme d'un produit et d'une somme : ♥♥ $f(t) = u(t)v(t) + 40$ avec :

$\begin{cases} u(t) = 0{,}04 \times t^2 - 8 \times t + 400 \\ u'(t) = 0{,}04 \times 2t - 8 \times 1 + 0 = 0{,}08t - 8 \end{cases}$ et $\begin{cases} v(t) = e^{\frac{t}{50}} \\ v'(t) = \frac{1}{50}e^{\frac{t}{50}} = 0{,}02e^{\frac{t}{50}} \end{cases}$ (grâce à la question 1), avec ici : $a = \frac{1}{50}$ et $b = 0$).

f est dérivable sur $[0\ ;\ 120]$ et :

♥♥ $f'(t) = u'(t)v(t) + u(t)v'(t) + 0 = u'(t)v(t) + u(t)v'(t)$ ♥♥ (la dérivée d'une fonction constante est nulle).

$f'(t)= (0{,}08t-8)\,e^{\frac{t}{50}} + (0{,}04\times t^2 - 8\times t + 400)\times 0{,}02e^{\frac{t}{50}}$.

On factorise alors par $e^{\frac{t}{50}}$, de sorte que :

$f'(t)=\ e^{\frac{t}{50}} \times ((0{,}08t-8) + (0{,}04\times t^2 - 8\times t + 400)\times 0{,}02)$.

$f'(t)=\ e^{\frac{t}{50}} \times ((0{,}08t-8) + (0{,}04\times 0{,}02t^2 - 8\times t\times\ 0{,}02 + 400\times\ 0{,}02)$.

$f'(t)=\ e^{\frac{t}{50}} \times (0{,}08t - 8 + 0{,}0008t^2 - 0{,}16t +\ 8) = e^{\frac{t}{50}} \times (0{,}0008t^2 - 0{,}08t)$.

Or, $0{,}0008 = 8\times 10^{-4}$ et $0{,}08 = 8\times 10^{-2} = 100\times 8\times 10^{-4}$, on a en factorisant par 8×10^{-4} :

$f'(t)=\ 8\times 10^{-4}\times e^{\frac{t}{50}} \times (t^2-100t) = 8\times 10^{-4}\times \left((t^2-100t)\right)e^{\frac{t}{50}}$.

Or $t^2-100t = t(t-100)$, donc on a bien : $\boxed{f'(t)= 8\times 10^{-4}\times t(t-100)e^{\frac{t}{50}}.}$

3*a*) Etudions le signe de $f'(t)$ sur l'intervalle $[0\ ;\ 120]$: cela nous permettra d'avoir le sens de variation de f sur $[0\ ;\ 120]$.

En effet, rappelons le résultat fondamental de première suivant :

Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I.

♥♥ *Si pour tout réel x appartenant à* I, $f'(x) \geqslant 0$, *alors f est croissante sur* I. ♥♥

♥♥ *Si pour tout réel x appartenant à* I, $f'(x) \leqslant\ 0$, *alors f est décroissante sur* I. ♥♥

Ici, $f'(t) = 8\times 10^{-4}\times t(t-100)e^{\frac{t}{50}}$.

♥♥ *La fonction exponentielle prend des valeurs strictement positives* ♥♥, *donc pour tout réel t appartenant à* $[0\ ;120]$, $e^{t/50}>0$. Or, $8\times 10^{-4} > 0$, donc $f'(t)$ a le même signe que $t(t-100)$ sur $[0\ ;\ 120]$.

Or t $\geqslant 0$, donc $f'(\mathrm{t})$ a même signe que $t-100$ et s'annule lorsque $t=0$.

Ainsi, $f'(t) \geqslant 0$ équivaut à : $t = 0$ ou $t-100 \geqslant 0$, c'est-à-dire à : $t = 0$ ou $t \geqslant 100$.

D'où le tableau de variation suivant de f sur $[0\ ;\ 120]$:

$f(0) = 440$ (question 0*a*), $f(100) = (400-800+400)\mathrm{e}^{\frac{100}{50}} + 40 = 0 + 40 = 40$

$f(120) = 576 - 960 + 400)\mathrm{e}^{\frac{120}{50}} + 40 = 16\mathrm{e}^{2,4} + 40 \approx 216{,}37.$

t	0		100		120
$t(t-100)$	0	$-$	0	$+$	
$f'(t)$	0	$-$	0	$+$	
$f(t)$	440	↘	40	↗	$16e^{2,4}+40$

① On ne met que des valeurs exacte dans un tableau de variation.

3*b*) D'après le tableau de variation de la question précédente, f décroit sur l'intervalle $[0\ ;\ 100]$ et croit sur l'intervalle $[100\ ;120]$.

Donc f admet un minimum sur l'intervalle $[0\ ;120]$ atteint lorsque $t = 100$.

Le nombre de crapauds est donc minimal au bout de 100 jours, et il y aura alors 40 crapauds.

3*c*) Le rôle de cet algorithme est d'afficher ***quelle est la durée minimale après l'introduction des truites dans le lac pour que le nombre de crapauds devienne strictement inférieur à*** **220**.

En se souvenant qu'initialement il y avait 440 crapauds, cet algorithme détermine l'instant à partir duquel la population de crapauds sera strictement inférieure à la moitié de sa population initiale.

En exécutant ce programme sur python, on trouve : $t = 65$.

Au bout de 65 jours, la population de crapauds compte moins de 220 individus.