

Exercice I

PARTIE A

On considère l'équation différentielle (E) : $y' + \frac{1}{4}y = 20e^{-\frac{1}{4}x}$,

d'inconnue y , fonction définie et dérivable sur l'intervalle $[0 ; +\infty[$.

1. Soit g la fonction définie sur l'intervalle $[0 ; +\infty[$ par $g(x) = axe^{-\frac{1}{4}x}$.

La fonction linéaire u définie par $u(x) = -\frac{1}{4}x$ est dérivable sur \mathbb{R} et sur cet intervalle

$$u'(x) = -\frac{1}{4}.$$

La fonction composée $g(u(x)) = axe^{u(x)}$ est elle aussi dérivable sur \mathbb{R} et sur cet intervalle, $g'(u) = ae^{u(x)} + axu' \times e^{u(x)} = ae^{-\frac{1}{4}x} + ax \times \left(-\frac{1}{4}\right) e^{-\frac{1}{4}x} = e^{-\frac{1}{4}x} \left(a - \frac{ax}{4}\right)$.

$$\text{Or } g'(x) + \frac{1}{4}g(x) = e^{-\frac{1}{4}x} \left(a - \frac{ax}{4}\right) + \frac{1}{4} \times axe^{-\frac{1}{4}x} = e^{-\frac{1}{4}x} \left(a - \frac{ax}{4} + \frac{ax}{4}\right) = ae^{-\frac{1}{4}x}.$$

Donc g est solution de l'équation différentielle sur $[0 ; +\infty[$, si sur cet intervalle :

$$ae^{-\frac{1}{4}x} = 20e^{-\frac{1}{4}x} \iff a = 20, \text{ car quel que soit } x \text{ réel, } e^{-\frac{1}{4}x} \neq 0.$$

La fonction $g : x \mapsto 20xe^{-\frac{1}{4}x}$ définie sur l'intervalle $[0 ; +\infty[$ est une solution particulière de l'équation (E).

2. On considère l'équation différentielle (E') : $y' + \frac{1}{4}y = 0$,

d'inconnue y , fonction définie et dérivable sur l'intervalle $[0 ; +\infty[$.

L'équation (E') peut s'écrire $y' = -\frac{1}{4}y$ et on sait que les solutions de cette équation (E') sont les fonctions f définies par :

$$f(x) = Ke^{-\frac{1}{4}x}, \text{ avec } K \in \mathbb{R}.$$

3. Les solutions f de l'équation (E) sont telles que pour $x \in [0 ; +\infty[$,

$$f'(x) + \frac{1}{4}f(x) = 20e^{-\frac{1}{4}x} \text{ ou d'après la question 1. :}$$

$$f'(x) + \frac{1}{4}f(x) = g'(x) + \frac{1}{4}g(x) \iff f'(x) - g'(x) = \frac{1}{4}[f(x) - g(x)] \text{ soit par linéarité de la dérivation :}$$

$(f - g)'(x) + \frac{1}{4}[(f - g)(x)] = 0$: ceci signifie que la fonction $f - g$ est solution de (E') c'est-à-dire que

$$f(x) - g(x) = Ke^{-\frac{1}{4}x} \iff f(x) = Ke^{-\frac{1}{4}x} + g(x) \text{ ou enfin } f(x) = Ke^{-\frac{1}{4}x} + 20xe^{-\frac{1}{4}x} \iff f(x) = (20x + K)e^{-\frac{1}{4}x}, \text{ avec } K \in \mathbb{R}.$$

Les solutions de (E) sur l'intervalle $[0; +\infty[$ sont donc les fonctions f définies par :
 $f(x) = e^{-\frac{1}{4}x}(20x + K)$, avec $K \in \mathbb{R}$.

4. On a $f(0) = 8 \iff (20 \times 0 + K)e^0 = 8 \iff K = 8$, donc :

$$f(x) = (20x + 8)e^{-\frac{1}{4}x} = 4(5x + 2)e^{-\frac{1}{4}x}.$$

PARTIE B

On considère la fonction f définie sur $[0; +\infty[$ par $f(x) = (20x + 8)e^{-\frac{1}{4}x}$.

1. a. La fonction f est la fonction trouvée à la fin de la partie A : elle est donc dérivable et vérifie l'équation (E), soit

$$f'(x) + \frac{1}{4}f(x) = 20e^{-\frac{1}{4}x} \text{ donc}$$

$$f'(x) = 20e^{-\frac{1}{4}x} - \frac{1}{4} \times 4(5x + 2)e^{-\frac{1}{4}x} = e^{-\frac{1}{4}x}(20 - 5x - 2) = (18 - 5x)e^{-\frac{1}{4}x}.$$

b. Comme quel que soit x , $e^{-\frac{1}{4}x} > 0$, le signe de $f'(x)$ est celui de $18 - 5x$:

- $18 - 5x > 0 \iff \frac{18}{5} > x$: sur l'intervalle $\left[0; \frac{18}{5}\right]$, $f'(x) > 0$: la fonction f est croissante;

- $18 - 5x < 0 \iff \frac{18}{5} < x$: sur l'intervalle $\left[\frac{18}{5}; +\infty\right]$, $f'(x) < 0$: la fonction f est décroissante;

$f'\left(\frac{18}{5}\right) = 0$, donc $f\left(\frac{18}{5}\right)$ est le maximum de la fonction f sur l'intervalle $[0; +\infty[$.

On a $f\left(\frac{18}{5}\right) = (72 + 8)e^{-\frac{1}{4} \times \frac{18}{5}} = 80e^{-\frac{9}{10}} \approx 32,53$.

On a vu à la partie A que $f(0) = 8$, et on admet que $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$.

D'où le tableau de variations :

x	0	$\frac{18}{5}$	$+\infty$
$f'(x)$		0	
		+	-
f	8	$80e^{-\frac{9}{10}}$	0

2. Dans cette question on s'intéresse à l'équation $f(x) = 8$.

a. On a $f(14) = 288e^{-3,5} \approx 8,7$ et $f(15) = 300e^{-3,75} \approx 7,2$.

Sur l'intervalle $[14; 15]$, la fonction f est continue car dérivable sur $[0; +\infty[$, donc sur $[14; 15]$ et elle est strictement décroissante; comme $8 \in [f(15); f(14)]$, il existe d'après le corollaire du théorème des valeurs intermédiaires un réel unique α telle que $f(\alpha) = 8$.

b. On complète le tableau ci-dessous en faisant tourner étape par étape la fonction solution_equation écrite en langage Python

a	14	14	14,25	14,375	14,4375
b	15	14,5	14,5	14,5	14,5
$b - a$	1	0,5	0,25	0,125	0,0625
m	14,5	14,25	14,375	14,4375	
Condition $f(m) > 8$	FAUX	VRAI	VRAI	VRAI	

- c. L'objectif de la fonction `solution_equation` est de déterminer, par dichotomie, un encadrement d'amplitude 0,1 de la solution de l'équation $f(x) = 8$ dans l'intervalle $[14 ; 15]$.

Exercice II

1. a. Dans le repère $(A ; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, on a les points suivants :
H(0 ; 2 ; 2), M(3 ; 0 ; 1) et N(3 ; 1 ; 1).

b. On a $\overrightarrow{HM} = \begin{pmatrix} x_M - x_H \\ y_M - y_H \\ z_M - z_H \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix}$

La droite (HM) est dirigée par \overrightarrow{HM} et elle passe par H, elle admet donc comme représen-

tation paramétrique :
$$\begin{cases} x = x_H + t x_{\overrightarrow{HM}} \\ y = y_H + t y_{\overrightarrow{HM}} \\ z = z_H + t z_{\overrightarrow{HM}} \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}, \text{ soit ici : } \begin{cases} x = 3t \\ y = 2 - 2t \\ z = 2 - t \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}$$

2. Dans le repère $(A ; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, on a les coordonnées suivantes :

$$B(2 ; 0 ; 0)$$

$$C(2 ; 2 ; 0)$$

$$F(2 ; 0 ; 2)$$

Le plan (BCF) est parallèle au plan yOz , son équation est donc de la forme $x = c$, $c \in \mathbb{R}$.

Ici on a donc $x = 2$

Cherchons le paramètre t tel qu'un point M_t de paramètre t dans la représentation de (HM) soit un point de (BCF) :

$$M_t \in (\text{BCF}) \iff x_{M_t} = 2$$

$$\iff 3t = 2$$

$$\iff t = \frac{2}{3}$$

P est donc $M_{\frac{2}{3}}$ sur la droite (HM), il a donc comme coordonnées :

$$x_P = 2, y_P = 2 - 2 \times \frac{2}{3} = \frac{6}{3} - \frac{4}{3} = \frac{2}{3} \text{ et } z_P = 2 - \frac{2}{3} = \frac{6}{3} - \frac{2}{3} = \frac{4}{3}.$$

Cela confirme $P\left(2 ; \frac{2}{3} ; \frac{4}{3}\right)$

$$3. \quad \text{a.} \quad \overrightarrow{PM} \begin{pmatrix} x_M - x_P \\ y_M - y_P \\ z_M - z_P \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3-2 \\ 0-\frac{2}{3} \\ 1-\frac{4}{3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -\frac{2}{3} \\ -\frac{1}{3} \end{pmatrix} \quad \text{et de même : } \overrightarrow{PN} \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} \end{pmatrix}.$$

Comme le repère est orthonormé, on peut calculer le produit scalaire à l'aide des coordonnées :

$$\overrightarrow{PM} \cdot \overrightarrow{PN} = 1 \times 1 - \frac{2}{3} \times \frac{1}{3} - \frac{1}{3} \times \left(-\frac{1}{3}\right) = 1 - \frac{2}{9} + \frac{1}{9} = \frac{8}{9}$$

$$\text{b.} \quad PM = \sqrt{1^2 + \left(-\frac{2}{3}\right)^2 + \left(-\frac{1}{3}\right)^2} = \sqrt{1 + \frac{4}{9} + \frac{1}{9}} = \sqrt{\frac{14}{9}} = \frac{\sqrt{14}}{3}$$

c. On sait que $\overrightarrow{PM} \cdot \overrightarrow{PN} = PM \times PN \times \cos(\widehat{MPN})$.

$$\text{On a donc } \frac{8}{9} = \frac{\sqrt{14}}{3} \times \frac{\sqrt{11}}{3} \times \cos(\widehat{MPN}).$$

$$\text{d'où } \cos(\widehat{MPN}) = \frac{8}{\sqrt{11}\sqrt{14}} \text{ soit } \widehat{MPN} \approx 50^\circ.$$

L'angle ne dépasse pas 55° , le toit peut donc être construit.

4. Les droites (EH) et (MN) sont parallèles donc les droites (HM) et (EN) sont coplanaires et non parallèles, elles sont donc sécantes.

$$\text{On a } \overrightarrow{EN} \begin{pmatrix} x_N - x_E \\ y_N - y_E \\ z_N - z_E \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

La droite (EN) est dirigée par \overrightarrow{EN} et elle passe par E, elle admet donc comme représentation

$$\text{paramétrique : } \begin{cases} x = x_E + t x_{\overrightarrow{EN}} \\ y = y_E + t y_{\overrightarrow{EN}} \\ z = z_E + t z_{\overrightarrow{EN}} \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}, \text{ soit ici : } \begin{cases} x = 3t' \\ y = t' \\ z = 2 - t' \end{cases} \quad t' \in \mathbb{R}$$

Pour trouver l'intersection des droites (EH) et (MN), il faut donc résoudre le système :

$$\begin{cases} 3t = 3t' \\ 2 - 2t = t' \\ 2 - t = 2 - t' \end{cases} \iff \begin{cases} t = t' \\ 2 - 2t = t \\ 2 - t = 2 - t \end{cases} \iff \begin{cases} t = t' \\ 2 = 3t \\ 0 = 0 \end{cases} \iff t = t' = \frac{2}{3}$$

P est donc le point d'intersection de ces deux droites.

Exercice III

$$1. \quad \text{a.} \quad \text{On a } \overrightarrow{AB} \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix} \text{ et } \overrightarrow{AC} \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} : \text{ ces deux vecteurs ne sont pas colinéaires (en comparant les}$$

premières coordonnées, s'il l'étaient on aurait $\overrightarrow{AB} = 2\overrightarrow{AC}$, ce qui est faux), donc les points A, B et C ne sont pas alignés et définissent donc un plan unique \mathcal{P} .

$$\text{b.} \quad \text{On a } \overrightarrow{CD} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \text{ puis}$$

- $\overrightarrow{CD} \cdot \overrightarrow{AB} = 4 - 1 - 3 = 0$;
- $\overrightarrow{CD} \cdot \overrightarrow{AC} = 2 - 2 + 0 = 0$.

Le vecteur \overrightarrow{CD} est donc orthogonal à deux vecteurs non colinéaires du plan \mathcal{P} , c'est donc un vecteur normal à ce plan.

Puisque $\overrightarrow{CD} \cdot \overrightarrow{AC} = 0$ les droites (CD) et (AC) sont perpendiculaires en C, donc C est le projeté orthogonal de D sur le plan \mathcal{P} .

c. Puisque \overrightarrow{CD} est un vecteur normal au plan \mathcal{P} , on sait que ses coordonnées sont dans l'ordre les coefficients a, b, c de x, y, z , soit :

$$M(x; y; z) \in \mathcal{P} \iff 2x + 1y - 1z + d = 0.$$

$$\text{En particulier } C(2; -2; -1) \in \mathcal{P} \iff 2 \times 2 + 1 \times (-2) - 1 \times (-1) + d = 0 \iff 4 - 2 + 1 + d = 0 \iff d = -3.$$

$$\text{Finalement : } M(x; y; z) \in \mathcal{P} \iff 2x + y - z - 3 = 0.$$

2. a. On a grâce aux coordonnées du vecteur \overrightarrow{CD} , $CD^2 = 4 + 1 + 1 = 6$, d'où $CD = \sqrt{6}$.
- b. Puisque C est le projeté orthogonal de D sur le plan \mathcal{P} , ce point est celui qui est à la plus courte distance du point D, soit $\sqrt{6}$: il n'existe donc pas d'autre point de \mathcal{P} situé à cette distance $\sqrt{6}$ de D ;
- Ou encore : la sphère de centre D et de rayon $\sqrt{6}$ est tangente en C au plan \mathcal{P} , donc quel que soit M dans \mathcal{P} , le triangle DCM est rectangle en C, d'hypoténuse [DM] et l'on sait qu'alors $DM > DC = \sqrt{6}$: tout point M du plan a une distance supérieure à $\sqrt{6}$ de D.

3. a. Si $M(x; y; z)$ est commun à Δ et à \mathcal{P} ses coordonnées vérifient le système :

$$\begin{cases} x & = & 0 \\ y & = & 2+t \\ z & = & -1+t \\ 2x+y-z-3 & = & 0 \end{cases}, \text{ avec } t \in \mathbb{R} \Rightarrow 2 \times 0 + 2 + t - (-1 + t) - 3 = 0 \Leftrightarrow 0 = 0 : \text{ ceci}$$

signifie que tout point de Δ appartient à \mathcal{P} donc que Δ est incluse dans le plan \mathcal{P} .

Soit H le projeté orthogonal du point D sur la droite Δ .

b. Un vecteur directeur de la droite Δ est $\delta \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ et avec $H(0; 2+t; -1+t)$, on a $\overrightarrow{DH} \begin{pmatrix} 4 \\ 3+t \\ 1+t \end{pmatrix}$.

Or $(DH) \perp \Delta \Rightarrow \delta \cdot \overrightarrow{DH} = 0 \Leftrightarrow 0 + 3 + t + 1 + t = 0 \Leftrightarrow 4 + 2t = 0 \Leftrightarrow 2t = -4 \Leftrightarrow t = -2$.

On a donc $H(0; 0; -3) \in \Delta$.

c. On a donc $\overrightarrow{DH} \begin{pmatrix} 4 \\ 3-2 \\ 1-2 \end{pmatrix}$, soit $\overrightarrow{DH} \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$; il en résulte que $DH^2 = 4^2 + 1^2 + (-1)^2 = 18$.

Finalement $DH = \sqrt{18} = \sqrt{9 \times 2} = \sqrt{9} \times \sqrt{2} = 3\sqrt{2}$.

Exercice IV

Dans l'espace muni d'un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, on considère les points

$$A(-1; -3; 2), \quad B(3; -2; 6) \quad \text{et} \quad C(1; 2; -4).$$

1. On a $\overrightarrow{AB} \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{AC} \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ -6 \end{pmatrix}$: ces vecteurs ne sont pas colinéaires, donc les points A, B et C ne sont pas alignés : ils définissent donc un plan \mathcal{P} .

2. a. On a :

- $\vec{n} \cdot \overrightarrow{AB} = 4 \times 13 + 1 \times (-16) + 4 \times (-9) = 52 - 16 - 36 = 52 - 52 = 0$;
- $\vec{n} \cdot \overrightarrow{AC} = 2 \times 13 + 5 \times (-13) + (-6 \times (-9)) = 26 - 65 + 54 = 52 - 52 = 0$.

Le vecteur \vec{n} est donc orthogonal à deux vecteurs non colinéaires du plan \mathcal{P} : il est normal à ce plan.

- b. On sait que $M(x; y; z) \in \mathcal{P} \Leftrightarrow ax + by + cz + d = 0$ et que a, b et c sont les composantes d'un vecteur normal à ce plan donc par exemple \vec{n} .

On a donc $M(x; y; z) \in \mathcal{P} \Leftrightarrow 13x - 16y - 9z + d = 0$.

par exemple $C(1; 2; -4) \in \mathcal{P} \Leftrightarrow 13 \times 1 + 2 \times (-16) - 9 \times (-4) + d = 0 + d = 0 \Leftrightarrow 13 - 32 + 36 + d = 0 \Leftrightarrow 17 + d = 0 \Leftrightarrow d = -17$.

On a donc $M(x; y; z) \in \mathcal{P} \Leftrightarrow 13x - 16y - 9z - 17 = 0$.

On note \mathcal{D} la droite passant par le point $F(15; -16; -8)$ et orthogonale au plan \mathcal{P} .

3. La droite \mathcal{D} étant orthogonale au plan \mathcal{P} a pour vecteur directeur le vecteur \vec{n} normal au plan \mathcal{P} .

$$\text{On a donc } M(x; y; z) \in \mathcal{D} \iff \overrightarrow{FM} = t\vec{n}, \quad t \in \mathbb{R}, \text{ soit } \begin{cases} x-15 = 13t \\ y+16 = -16t \\ z+8 = -9t \end{cases}, \quad t \in \mathbb{R}$$

4. Si $E(x; y; z)$ est commun à la droite \mathcal{D} et au plan \mathcal{P} , ses coordonnées vérifient les équations de la droite et celle du plan donc le système :

$$\begin{cases} x-15 = 13t \\ y+16 = -16t \\ z+8 = -9t \\ 13x-16y-9z-17 = 0 \end{cases}, \quad t \in \mathbb{R}.$$

En remplaçant x, y et z par leurs valeurs en fonction de t dans l'équation du plan, on obtient :

$$13(13t+15) - 16(16t-16) - 9(-9t-8) - 17 = 0 \iff 169t + 195 + 256t + 256 + 81t + 72 - 17 = 0 \iff 506t + 506 = 0 \iff t = -1.$$

En reportant cette valeur dans les équations paramétriques de la droite \mathcal{D} , on obtient :

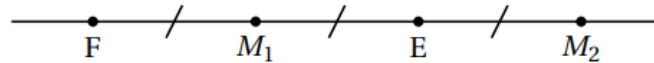
$$\begin{cases} x-15 = -13 \\ y+16 = 16 \\ z+8 = 9 \end{cases} \iff \begin{cases} x = 2 \\ y = 0 \\ z = 1 \end{cases}$$

Donc $E(2; 0; 1)$.

5. F et E appartiennent à la droite \mathcal{D} perpendiculaire au plan \mathcal{P} , donc la distance du point F au plan est égale à FE .

$$\text{Or } FE^2 = (-13)^2 + 16^2 + 9^2 = 169 + 256 + 81 = 506. \text{ D'où } FE = \sqrt{506}.$$

6. Comme précédemment si $M \in \mathcal{D}$ perpendiculaire au plan \mathcal{P} la distance de ce point au plan \mathcal{P} est ME .



- Premier point répondant à la question : M_1 tel que $\overrightarrow{EM_1} = \frac{1}{2}\overrightarrow{EF}$.

$$\text{De } \overrightarrow{EF} \begin{pmatrix} 13 \\ -16 \\ -9 \end{pmatrix}, \text{ on déduit que } \frac{1}{2}\overrightarrow{EF} = \overrightarrow{EM_1} \begin{pmatrix} 6,5 \\ -8 \\ -4,5 \end{pmatrix}, \text{ soit}$$

$$\begin{cases} x_1 - 2 = 6,5 \\ y_1 - 0 = -8 \\ z - 1 = -4,5 \end{cases} \iff \begin{cases} x_1 = 8,5 \\ y_1 = -8 \\ z = -3,5 \end{cases}$$

- Deuxième point répondant à la question : M_2 tel que $\overrightarrow{EM_2} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{EF}$.

De $\overrightarrow{EF} \begin{pmatrix} 13 \\ -16 \\ -9 \end{pmatrix}$, on déduit que $-\frac{1}{2}\overrightarrow{EF} = \overrightarrow{EM_2} \begin{pmatrix} -6,5 \\ 8 \\ 4,5 \end{pmatrix}$, soit

$$\begin{cases} x_2 - 2 = -6,5 \\ y_2 - 0 = 8 \\ z_2 - 1 = 4,5 \end{cases} \iff \begin{cases} x_2 = -4,5 \\ y_2 = 8 \\ z_2 = 5,5 \end{cases}$$

Donc $M_1(8,5; -8; -3,5)$ et $M_2(-4,5; 8; 5,5)$.

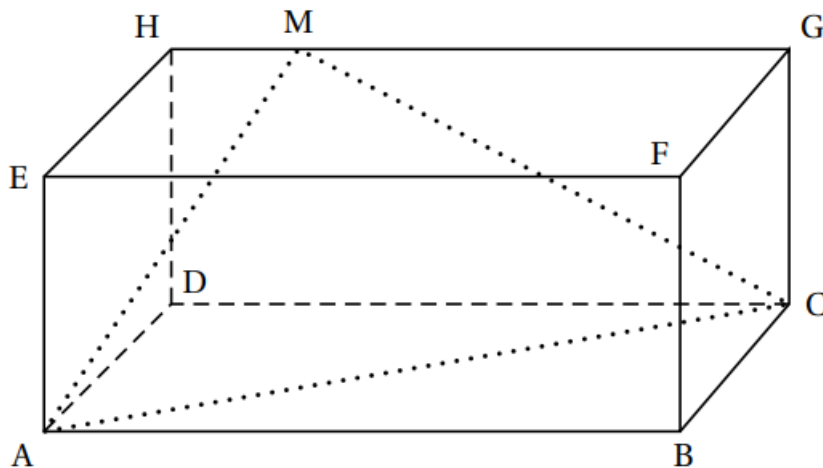
Exercice V

Dans la figure ci-dessous, ABCDEFGH est un parallélépipède rectangle tel que

$AB = 5$, $AD = 3$ et $AE = 2$.

L'espace est muni d'un repère orthonormé d'origine A dans lequel les points B, D et E ont respectivement pour coordonnées $(5; 0; 0)$, $(0; 3; 0)$ et $(0; 0; 2)$.

Le repère est donc : $\left(A; \frac{1}{5}\overrightarrow{AB}, \frac{1}{3}\overrightarrow{AD}, \frac{1}{2}\overrightarrow{AE}\right)$.



1. a. $\overrightarrow{AH} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AE}$ donc le point H a pour coordonnées $(0; 3; 2)$.
 $\overrightarrow{AG} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AE}$ donc le point G a pour coordonnées $(5; 3; 2)$.

b. La droite (GH) a pour vecteur directeur \overrightarrow{HG} de coordonnées (5 ; 0 ; 0).

De plus, elle passe par le point G donc elle a pour représentation paramétrique :

$$\begin{cases} x = 5 + 5t \\ y = 3 \\ z = 2 \end{cases} \quad \text{avec } t \in \mathbb{R}.$$

2. Soit M un point du segment [GH] tel que $\overrightarrow{HM} = k\overrightarrow{HG}$ avec k un nombre réel de l'intervalle [0 ; 1].

a. $\overrightarrow{HM} = k\overrightarrow{HG} \iff \begin{cases} x_M - 0 = 5k \\ y_M - 3 = 0 \\ z_M - 2 = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x_M = 5k \\ y_M = 3 \\ z_M = 2 \end{cases}$

Donc les coordonnées de M sont (5k ; 3 ; 2).

b. Les coordonnées de \overrightarrow{AM} sont celles de M donc : (5k ; 3 ; 2).

Les coordonnées de C sont (5 ; 3 ; 0), donc celles de \overrightarrow{CM} sont (5k - 5 ; 3 - 3 ; 2 - 0) soit (5k - 5 ; 0 ; 2).

$$\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{CM} = 5k \times (5k - 5) + 3 \times 0 + 2 \times 2 = 25k^2 - 25k + 4$$

c. Le triangle AMC est rectangle en M si et seulement si $\overrightarrow{AM} \perp \overrightarrow{CM}$, c'est-à-dire $\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{CM}$ ou encore $25k^2 - 25k + 4 = 0$.

$$\text{On résout cette équation. } \Delta = (-25)^2 - 4 \times 25 \times 4 = 225 = 15^2$$

$$\text{L'équation admet deux solutions } k' = \frac{25 + 15}{2 \times 25} = \frac{40}{50} = \frac{4}{5} \text{ et } k'' = \frac{25 - 15}{2 \times 25} = \frac{10}{50} = \frac{1}{5}$$

Donc pour $k = \frac{1}{5}$ ou $k = \frac{4}{5}$, le triangle AMC est rectangle en M.

Dans toute la suite de l'exercice, on considère que le point M a pour coordonnées (1 ; 3 ; 2).

On admet que le triangle AMC est rectangle en M.

3. On considère le point K de coordonnées (1 ; 3 ; 0).

a. Le plan (ACD) a pour vecteurs directeurs \overrightarrow{AB} et \overrightarrow{AD} , donc il a pour équation cartésienne $z = 0$.

b. $z_K = 0$ donc le point K appartient au plan (ACD).

\overrightarrow{MK} a pour coordonnées (0 ; 0 ; -2), donc

- $\overrightarrow{MK} \cdot \overrightarrow{AB} = 0$ donc $\overrightarrow{MK} \perp \overrightarrow{AB}$;
- $\overrightarrow{MK} \cdot \overrightarrow{AC} = 0$ donc $\overrightarrow{MK} \perp \overrightarrow{AC}$.

On en déduit que \overrightarrow{MK} est orthogonal au plan (ACD), et donc que K est le projeté orthogonal du point M sur le plan (ACD).

c. Le volume du tétraèdre MACD est : $\frac{1}{3} \times \text{Aire de ACD} \times MK$.

\overrightarrow{MK} a pour coordonnées (0 ; 0 ; -2), donc $MK = 2$.

Le triangle ACD est rectangle en D donc a pour aire $\frac{AD \times DC}{2} = \frac{3 \times 5}{2} = \frac{15}{2}$.

Le volume du tétraèdre MACD est donc, en unités de volume : $\frac{1}{3} \times \frac{15}{2} \times 2 = 5$.

4. On note P le projeté orthogonal du point D sur le plan (AMC).

Si on considère D comme sommet du tétraèdre MACD, la base est le triangle AMC, et la hauteur est DP.

Le triangle AMC est rectangle en M donc son aire est : $\frac{AM \times MC}{2}$.

$$AM = \sqrt{(1-0)^2 + (3-0)^2 + (2-0)^2} = \sqrt{14}$$

$$CM = \sqrt{(1-5)^2 + (3-3)^2 + (2-0)^2} = \sqrt{20}$$

$$\text{L'aire de AMC vaut : } \frac{\sqrt{14} \times \sqrt{20}}{2} = \sqrt{70}.$$

Le tétraèdre MACD a donc pour volume : $\frac{1}{3} \times \sqrt{70} \times DP$ soit : $\frac{DP\sqrt{70}}{3}$.

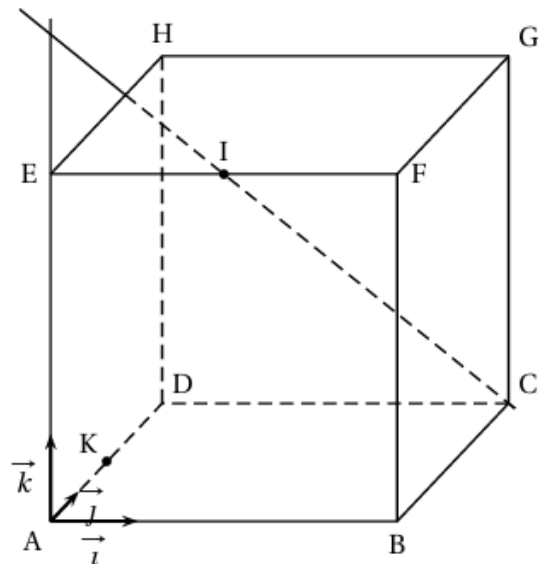
On sait que ce volume vaut 5, donc : $\frac{DP\sqrt{70}}{3} = 5$ donc : $DP = \frac{15}{\sqrt{70}} \approx 1,8$.

Exercice VI

On considère un repère orthonormé $(A; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ de l'espace dans lequel on place les points

$B(4; 0; 0)$, $D(0; 4; 0)$, $E(0; 0; 4)$,

et les points C, F, G et H de sorte que le solide ABCDEFGH soit un cube.



1. De $\vec{AC} = \vec{AB} + \vec{AD} = 4\vec{i} + 4\vec{j}$, on déduit que $C(4; 4; 0)$;

De $\vec{AF} = \vec{AB} + \vec{AE} = 4\vec{i} + 4\vec{k}$, on déduit que $F(4; 0; 4)$;

De $\vec{AG} = \vec{AB} + \vec{AD} + \vec{AE} = 4\vec{i} + 4\vec{j} + 4\vec{k}$, on déduit que $G(4; 4; 4)$;

De $\vec{AH} = \vec{AD} + \vec{AE} = 4\vec{j} + 4\vec{k}$, on déduit que $H(0; 4; 4)$.

2. Le point I, milieu de [EF], a pour coordonnées $\left(\frac{0+4}{2}; \frac{0+0}{2}; \frac{4+4}{2}\right) = (2; 0; 4)$.

On sait que $M(x; y; z) \in (IC) \iff \overrightarrow{IM} = t\overrightarrow{IC}$, avec $t \in \mathbb{R}$.

Avec $\overrightarrow{IC} \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ -4 \end{pmatrix}$, on a donc :

$$M(x; y; z) \in (IC) \iff \begin{cases} x-2 = 2t \\ y-0 = 4t \\ z-4 = -4t, \end{cases} \text{ avec } t \in \mathbb{R} \iff \begin{cases} x = 2+2t \\ y = 4t \\ z = 4-4t \end{cases} \text{ où } t \in \mathbb{R}.$$

3. On désigne par \mathcal{P} le plan orthogonal à la droite (IC) passant par le point G, et par J l'intersection de \mathcal{P} avec (IC).

a. Le vecteur $\overrightarrow{IC} \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ -4 \end{pmatrix}$ est un vecteur normal au plan \mathcal{P} . On sait qu'alors :

$$M(x; y; z) \in \mathcal{P} \iff 2x + 4y - 4z + d = 0, \text{ avec } d \in \mathbb{R}.$$

$$\text{Ainsi } G(4; 4; 4) \in \mathcal{P} \iff 2 \times 4 + 4 \times 4 - 4 \times 4 + d = 0 \iff d = -8.$$

$$\text{On a donc } M(x; y; z) \in \mathcal{P} \iff 2x + 4y - 4z - 8 = 0 \iff x + 2y - 2z - 4 = 0.$$

b. J étant commun à (IC) et \mathcal{P} , ses coordonnées $(x; y; z)$ vérifient les équations paramétriques de (IC) et l'équation cartésienne de \mathcal{P} , soit le système :

$$\begin{cases} x & = 2 + 2t \\ y & = 4t \\ z & = 4 - 4t \\ x + 2y - 2z - 4 & = 0 \end{cases}$$

En remplaçant x , y et z par leurs valeurs en fonction de t dans la dernière équation on obtient :

$$2 + 2t + 2 \times 4t - 2 \times (4 - 4t) - 4 = 0 \iff 2 + 2t + 8t - 8 + 8t - 4 = 0 \\ \iff 18t - 10 = 0 \iff 9t - 5 = 0 \iff t = \frac{5}{9}.$$

En utilisant la représentation paramétrique de (IC), on obtient :

$$x = 2 + 2 \times \frac{5}{9} = \frac{18 + 10}{9} = \frac{28}{9}; y = 4 \times \frac{5}{9} = \frac{20}{9} \text{ et } z = 4 - 4 \times \frac{5}{9} = \frac{36 - 20}{9} = \frac{16}{9}.$$

Donc C est la perpendiculaire (IC) au plan \mathcal{P} qui coupe ce plan en J : J est donc le projeté orthogonal de C sur le plan, \mathcal{P} .

- c. $K(0; 2; 0) \in \mathcal{P} \iff 0 + 2 \times 2 - 2 \times 0 - 4 = 0$: cette égalité est vraie
d. On vient de voir que K est un point de \mathcal{P} et K est un point du plan de la base (ABCD) du cube.

D'autre part $B(4; 0; 0) \in \mathcal{P} \iff 4 + 2 \times 0 - 2 \times 0 - 4 = 0$, qui est vraie donc B est un point de \mathcal{P} et bien sur de (ABC).

Conclusion : les deux points B et K sont communs aux deux plans, donc l'intersection des plans \mathcal{P} et (ABC) est la droite (BK).

4. a. On prend comme base le triangle CBG de la face de droite BCGF : son aire est la moitié de celle du carré de côté 4, soit $\frac{4^2}{2} = 8$.

La hauteur de la pyramide est alors [DC] avec $DC = 4$.

$$\text{On a donc : } V_{\text{CBKG}} = \frac{8 \times 4}{3} = \frac{32}{3}.$$

- b. En prenant pour la même pyramide la base BKG, la hauteur est [CJ].

$$\text{Comme } \vec{CJ} \begin{pmatrix} 4 - \frac{28}{9} \\ 4 - \frac{20}{9} \\ \frac{16}{9} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{8}{9} \\ \frac{16}{9} \\ \frac{16}{9} \end{pmatrix}, \text{ d'où :}$$

$$CJ^2 = \|\vec{CJ}\|^2 = \left(\frac{8}{9}\right)^2 + \left(\frac{16}{9}\right)^2 + \left(\frac{16}{9}\right)^2 = \frac{64 + 256 + 256}{81} = \frac{576}{81} = \frac{9 \times 64}{9 \times 9} = \frac{64}{9} = \left(\frac{8}{3}\right)^2.$$

$$\text{Donc } CJ = \frac{8}{3}.$$

Le volume de la pyramide est égal à :

$$\frac{32}{3} = \frac{\text{aire}(\text{BKG}) \times \frac{8}{3}}{3} \iff \text{aire}(\text{BKG}) = 32 \times \frac{3}{8} = 4 \times 3 = 12.$$

- c. On a déjà vu que B est un point de \mathcal{P} et G aussi par définition, donc la droite (BG) est incluse dans le plan \mathcal{P} .

- d. On note I' un point de l'arête $[EF]$, et \mathcal{P}' le plan orthogonal à la droite $(I'C)$ passant par G .

Le point I' a pour coordonnées $(x; y; z)$ telles que $\overrightarrow{EI'} = k\overrightarrow{EF}$ avec $k \in [0; 1]$.

$$\text{Donc } \begin{cases} x-0 = (4-0)k \\ y-0 = (0-0)k \\ z-4 = (4-4)k \end{cases} \text{ et donc } I' \begin{pmatrix} 4k \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}; \text{ on a donc } \overrightarrow{I'C} \begin{pmatrix} 4-4k \\ 4 \\ -4 \end{pmatrix}.$$

$$\overrightarrow{BG} \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 4 \end{pmatrix} \text{ donc } \overrightarrow{I'C} \cdot \overrightarrow{BG} = (4-4k) \times 0 + 4 \times 4 + (-4) \times 4 = 0 \text{ donc } \overrightarrow{I'C} \perp \overrightarrow{BG}.$$

G appartient au plan \mathcal{P}' qui est le plan orthogonal à $(I'C)$; comme $\overrightarrow{I'C} \perp \overrightarrow{BG}$, on peut dire que B appartient aussi à \mathcal{P}' . Donc la droite (BG) est incluse dans \mathcal{P}' .

Exercice VII (facultatif)

1. a. $\overrightarrow{AB} \begin{pmatrix} 7 \\ -4 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{AC} \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix}$; $7 \times \frac{2}{7} = 2$ et $-4 \times \frac{2}{7} \neq 3$ donc les vecteurs \overrightarrow{AB} et \overrightarrow{AC} ne sont pas colinéaires.

Les points A, B et C ne sont pas alignés donc ils définissent bien un plan dont \overrightarrow{AB} et \overrightarrow{AC} sont deux vecteurs directeurs.

- b. Soit le vecteur $\vec{n} \begin{pmatrix} 5 \\ 16 \\ 29 \end{pmatrix}$.

$$\vec{n} \cdot \overrightarrow{AB} = 5 \times 7 + 16 \times (-4) + 29 \times 1 = 35 - 64 + 29 = 0 \text{ donc } \vec{n} \perp \overrightarrow{AB}.$$

$$\vec{n} \cdot \overrightarrow{AC} = 5 \times 2 + 16 \times 3 + 29 \times (-2) = 10 + 48 - 58 = 0 \text{ donc } \vec{n} \perp \overrightarrow{AC}.$$

Donc le vecteur \vec{n} est un vecteur orthogonal à deux vecteurs directeurs du plan (ABC) donc le vecteur \vec{n} est un vecteur normal au plan (ABC) .

- c. Le plan (ABC) est l'ensemble des points M tels que \overrightarrow{AM} et \vec{n} sont orthogonaux.

Si M a pour coordonnées $(x; y; z)$, alors \overrightarrow{AM} a pour coordonnées $(x+1; y+1; z)$.

$$\overrightarrow{AM} \perp \vec{n} \iff \overrightarrow{AM} \cdot \vec{n} = 0 \iff 5(x+1) + 16(y+1) + 29z = 0 \iff 5x + 16y + 29z + 21 = 0$$

Le plan (ABC) a pour équation $5x + 16y + 29z + 21 = 0$.

2. a. $AB^2 = \|\overrightarrow{AB}\|^2 = 7^2 + (-4)^2 + 1^2 = 49 + 16 + 1 = 66$

$$AC^2 = \|\overrightarrow{AC}\|^2 = 2^2 + 3^2 + (-2)^2 = 4 + 9 + 4 = 17$$

$$BC^2 = (1-6)^2 + (2+5)^2 + (-2-1)^2 = 25 + 49 + 9 = 83$$

$66 + 17 = 83$ ce qui équivaut à $AB^2 + AC^2 = BC^2$ donc, d'après la réciproque du théorème de Pythagore, le triangle ABC est rectangle en A .

b. Le triangle ABC est rectangle en A donc son aire vaut $\frac{AB \times AC}{2} = \frac{\sqrt{66} \times \sqrt{17}}{2} = \frac{\sqrt{1122}}{2}$.

3. a. Les points A, B, C et S sont coplanaires si et seulement si le point S appartient au plan (ABC) .

Le plan (ABC) a pour équation $5x + 16y + 29z + 21 = 0$.

$$5x_S + 16y_S + 29z_S + 21 = 5 \times 13 + 16 \times 37 + 29 \times 54 + 21 = 1705 \neq 0 \text{ donc } S \notin (ABC).$$

Les points A, B, C et S ne sont pas coplanaires.

- b. La droite (Δ) perpendiculaire au plan (ABC) passant par S coupe le plan (ABC) en un point noté H .

La droite (Δ) est perpendiculaire au plan (ABC) donc elle a pour vecteur directeur le vecteur \vec{n} . Donc le vecteur \overrightarrow{SH} est colinéaire au vecteur \vec{n} donc le vecteur \overrightarrow{SH} a pour coordonnées $(5k; 16k; 29k)$ où k est un réel. Si le point H a pour coordonnées $(x_H; y_H; z_H)$, le vecteur \overrightarrow{SH} a pour coordonnées $(x_H - 13; y_H - 37; z_H - 54)$.

$$\text{On en déduit : } \begin{cases} x_H = 13 + 5k \\ y_H = 37 + 16k \\ z_H = 54 + 29k \end{cases}$$

On exprime que H appartient au plan (ABC), ce qui va permettre de déterminer la valeur de k :

$$\begin{aligned}5x_H + 16y_H + 29z_H + 21 = 0 &\iff 5(13 + 5k) + 16(37 + 16k) + 29(54 + 29k) + 21 = 0 \\ &\iff 65 + 25k + 592 + 256k + 1566 + 841k + 21 = 0 \\ &\iff 2244 + 1122k = 0 \iff k = -2\end{aligned}$$

$$\text{Donc le point H a pour coordonnées : } \begin{cases} x_H = 13 + 5(-2) = 3 \\ y_H = 37 + 16(-2) = 5 \\ z_H = 54 + 29(-2) = -4 \end{cases}$$

4. Le volume du tétraèdre SABC est $\frac{\text{aire}(ABC) \times SH}{3}$.

Le vecteur \overrightarrow{SH} a pour coordonnées $(5k ; 16k ; 29k)$ donc

$(5(-2) ; 16(-2) ; 29(-2)) = (-10 ; -32 ; -58)$. Donc $SH^2 = (-10)^2 + (-32)^2 + (-58)^2 = 4488$ et donc $SH = \sqrt{4488} = 2\sqrt{1122}$.

$\text{aire}(ABC) = \frac{\sqrt{1122}}{2}$ donc le volume du tétraèdre est $\frac{\frac{\sqrt{1122}}{2} \times 2\sqrt{1122}}{3} = \frac{1122}{3} = 374$ unités de volume.