Exercice I

1*a*)

F est dérivable sur $\mathbb{R}$ (Somme et composée de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$).

$F(x) = x - \ln(1+e^x) = x - \ln(u(x))$ avec : $\begin{cases} u(x) = 1+e^x \\ u'(x) = e^x \end{cases}$

$$F'(x) = 1 - \frac{u'(x)}{u(x)} = 1 - \frac{e^x}{1+e^x} = \frac{1+e^x}{1+e^x} - \frac{e^x}{1+e^x}$$

$$F'(x) = \frac{1+e^x-e^x}{1+e^x} = \frac{1}{1+e^x} = f(x).$$

Donc F est bien une primitive de f sur $\mathbb{R}$.

b) $x>1$ et $F(x) = \ln(\ln(x)) = \ln(v(x))$ où $\begin{cases} v(x) = \ln(x) \\ v'(x) = \frac{1}{x} \end{cases}$

$$F'(x) = \frac{v'(x)}{v(x)} = \frac{\frac{1}{x}}{\ln(x)} = \frac{1}{x\ln(x)} = f(x)$$

Donc F est une primitive de f sur $]1;+\infty[$.

2) $f(x) = \dfrac{e^x}{e^x+2}$. Posons : $u(x) = e^x + 1$, donc $u'(x) = e^x$.

f est de la forme : $\dfrac{u'}{u}$

Donc les primitives de f sont les fonctions F définies sur $\mathbb{R}$ par :

$F(x) = ln(|u(x)|)+k = ln(e^x+2) + k$, car ici, $e^x+1 > 0$ pour tout réel x, par positivité des valeurs prises par la fonction exponentielle sur $\mathbb{R}$ (où $k \in \mathbb{R}$).

Enfin, traduisons la condition $F(0) = 1$: $ln(e^0+2) + k = 1$, donc $k = 1 - ln(3)$.

Par suite, pour tout réel x, on a : $F(x) = ln(e^x+2) + 1 - ln(3)$.

3)

$f(x) = 2e^{-x} + \pi x^3 - 0{,}2x^2 + \frac{2}{7}x - 11.$

$F(x) = -2e^{-x} + \frac{\pi x^4}{4} - \frac{0{,}2x^3}{3} + \frac{2}{7} \times \frac{x^2}{2} - 11x$

$F(x) = -2e^{-x} + \frac{\pi x^4}{4} - \frac{x^3}{15} + \frac{x^2}{7} - 11x$ car $\frac{0{,}2}{3} = \frac{2}{30} = \frac{1}{15}$

$g(x) = 5sin(x) + 4e^{\frac{2x}{7}} - 4e^{-5x}$ se primitive sans difficultés d'après le cours en :

$$G(x) = -5cos(x) + 4 \times \frac{e^{\frac{2}{7}x}}{\frac{2}{7}} - 4 \times \frac{e^{-5x}}{-5} = -5\,cos(x) + 14e^{\frac{2}{7}x} + \frac{4}{5}e^{-5x}.$$

4)

56 **a)** $2+\dfrac{e^x}{e^x+4}=\dfrac{2(e^x+4)}{e^x+4}+\dfrac{e^x}{e^x+4}$.

Donc $2+\dfrac{e^x}{e^x+4}=\dfrac{3e^x+8}{e^x+4}$.

Ainsi pour tout x, $k(x)=2+\dfrac{e^x}{e^x+4}$.

b) Donc une primitive sur $\mathbb{R}$ de k est définie par $K(x)=2x+\ln(e^x+4)$.

L'ensemble des primitives sur $\mathbb{R}$ de la fonction k est donc constitué des fonctions $x\mapsto 2x+\ln(e^x+4)+C$ définies sur $\mathbb{R}$ où C est une constante réelle.

K est une primitive sur $\mathbb{R}$ de k. Donc il existe une constante réelle C telle que pour tout réel x, $K(x)=2x+\ln(e^x+4)+C$.

Or $K(0)=0$, ainsi $\ln(5)+C=0$ soit $C=-\ln(5)$.

Donc la primitive sur $\mathbb{R}$ de k qui vérifie $K(0)=0$ est définie par $K(x)=2x+\ln(e^x+4)-\ln(5)$.

41*b*)

b) Une primitive sur $\mathbb{R}$ de f est définie par $F(x)=-2\left(\dfrac{3}{2}x^2-e^x\right)=-3x^2+2e^x$.

42*b*)

b) Une primitive sur $]0\,;+\infty[$ de f est définie par $F(x)=-\dfrac{2}{x}+4x$.

45 **a)** On pose $u(x) = x^2 - 2x + 4$, alors $u'(x) = 2x - 2$.

Ainsi, pour tout réel x, $f(x) = \frac{1}{2}u'(x)u^3(x)$.

Donc une primitive sur $\mathbb{R}$ de f est définie par $F(x) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{3+1}u^{3+1}(x) = \frac{1}{8}(x^2 - 2x + 4)^4$.

b) On pose $u(x) = e^{3x} + 1$, alors $u'(x) = 3e^{3x}$.

Ainsi, pour tout réel x, $g(x) = \frac{1}{3}u'(x)u^4(x)$.

Donc une primitive sur $\mathbb{R}$ de g est définie par $G(x) = \frac{1}{3} \times \frac{1}{4+1}u^{4+1}(x) = \frac{1}{15}(e^{3x} + 1)^5$.

53 Une primitive sur $]1;+\infty[$ de f est définie par $G(x) = \frac{1}{2}x^2 + 2x - 2\ln(x-1)$.

L'ensemble des primitives sur $]1;+\infty[$ de la fonction f est donc constitué des fonctions $x \mapsto \frac{1}{2}x^2 + 2x - 2\ln(x-1) + C$ définies sur $]1;+\infty[$ où C est une constante réelle.

F est une primitive sur $]1;+\infty[$ de f donc il existe une constante réelle C telle que pour tout réel $x > 1$, $F(x) = \frac{1}{2}x^2 + 2x - 2\ln(x-1) + C$.

Or $F(2) = 0$, ainsi $6 + C = 0$ soit $C = -6$.

Donc la primitive sur $]1;+\infty[$ de f qui s'annule en 2 est définie par $F(x) = \frac{1}{2}x^2 + 2x - 2\ln(x-1) - 6$.

48*b*)

b) On pose $u(x)=5x$, alors $u'(x)=5$.

Ainsi, pour tout réel x, $g(x)=\frac{3}{5}\times u'(x)\mathrm{e}^{u(x)}$.

Donc une primitive sur $\mathbb{R}$ de g est définie par $\mathrm{G}(x)=\frac{3}{5}\mathrm{e}^{u(x)}=\frac{3}{5}\mathrm{e}^{5x}$.

b) On pose $u(x)=x^2+2x$, alors $u'(x)=2x+2$.

Ainsi, pour tout réel x, $h(x)=2\times u'(x)\mathrm{e}^{u(x)}$.

Donc une primitive sur $\mathbb{R}$ de h est définie par $\mathrm{H}(x)=2\mathrm{e}^{u(x)}=2\mathrm{e}^{x^2+2x}$.

50 **a)** On pose $u(x)=x^2+1$, alors $u'(x)=2x$.

Ainsi, pour tout réel x, $f(x)=\frac{1}{2}\times\frac{u'(x)}{\sqrt{u(x)}}$.

Donc une primitive sur $\mathbb{R}$ de f est définie par $\mathrm{F}(x)=\frac{1}{2}\times 2\sqrt{u(x)}=\sqrt{x^2+1}$.

b) On pose $u(x)=\mathrm{e}^{3x}+4$, alors $u'(x)=3\mathrm{e}^{3x}$.

Ainsi, pour tout réel x, $g(x)=3\times\frac{u'(x)}{\sqrt{u(x)}}$.

Donc une primitive sur $\mathbb{R}$ de g est définie par $\mathrm{G}(x)=3\times 2\sqrt{u(x)}=6\sqrt{\mathrm{e}^{3x}+4}$

5)

a) $x \in \left]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right[$ et $f(x) = \tan(x) = \frac{\sin(x)}{\cos(x)}$

f est dérivable sur $\left]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right[$ car quotient de deux fonctions dérivables sur $\left]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right[$.

$$\boxed{f'(x)} = \frac{\sin'(x)\cos(x) - \sin(x)\cos'(x)}{\cos^2(x)} = \frac{\cos(x)\times\cos(x) - \sin(x)\times(-\sin(x))}{\cos^2(x)} = \frac{\cos^2(x)+\sin^2(x)}{\cos^2(x)} = \boxed{\frac{1}{\cos^2(x)}}$$

$\cos^2(x)+\sin^2(x)=1$ ♡

$$\boxed{f'(x)} = \frac{\cos^2(x)}{\cos^2(x)} + \frac{\sin^2(x)}{\cos^2(x)} = 1 + \left(\frac{\sin(x)}{\cos(x)}\right)^2 = \boxed{1+\tan^2(x)}$$

b) $g(x) = \frac{1}{\cos^2(x)} = f'(x)$

Donc $G(x) = f(x) + k$ où $k \in \mathbb{R}$ sont les primitives de g sur $\left]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right[$.

$G(x) = \tan(x) + k$ avec : $G(0) = 0 \iff \tan(0) + k = 0 \iff \frac{\sin(0)}{\cos(0)} + k = 0$

$\iff k = 0$ car $\sin(0) = 0$.

Donc $G(x) = \tan(x) = \frac{\sin(x)}{\cos(x)}$ est l'unique primitive de g sur $\left]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right[$ qui s'annule en 0.

c) $h(x) = \tan^2(x) = \underbrace{1+\tan^2(x)}_{f'} - 1$ (astuce Belge)

$h(x) = f'(x) - 1$

donc la fonction H définie sur $\left]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right[$ par : $H(x) = f(x) - x + k = \frac{\sin(x)}{\cos(x)} - x + k$ où $k \in \mathbb{R}$

<u>Exercice III</u>

C_1 est celle de f', C_2 est celle de f et C_3 est celle de F : pour le voir, on peut raisonner par élimination.....

Si C1 était la courbe de f, aucune (en vertu du principe de Lagrange) des deux courbes restantes ne respecteraient pas sur des intervalles adéquats le signe de la dérivée de f.

Idem, C3 ne peut pas être celle de f.

<u>Exercice IV</u>

72 f est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 2e^{-7x} - 2$.

Ainsi, pour tout réel x, $f'(x) = -14e^{-7x}$.

Donc, pour tout réel x,

$f'(x) + 7f(x) + 14 = -14e^{-7x} + 7(2e^{-7x} - 2) + 14 = 0.$

Ainsi f est solution sur $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle $y' + 7y + 14 = 0.$

75 **a)** Pour tout réel x, $g(x)=c$ avec $c\in\mathbb{R}$, donc $g'(x)=0$. g est solution de (**E**) si, et seulement si, $g'=-3g+4$, c'est-à-dire $0=-3c+4$ soit $c=\frac{4}{3}$.

b) f est solution de (**E**) si, et seulement si, $f'=-3f+4$.

Or $g'=-3g+4$. Ainsi, f est solution de (**E**) si, et seulement si, $f'-g'=-3(f-g)$ c'est-à-dire $(f-g)'=-3(f-g)$. Autrement dit, f est solution de (**E**) si, et seulement si, $f-g$ est solution de l'équation différentielle $y'=-3y$.

c) f est solution de (**E**) si, et seulement si, pour tout réel x, $f(x)-g(x)=k\mathrm{e}^{-3x}$ où k est un nombre réel, c'est-à-dire $f(x)=k\mathrm{e}^{-3x}+\frac{4}{3}$.

Les solutions sur $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle $y'=-3y+4$ sont donc les fonctions $x\mapsto k\mathrm{e}^{-3x}+\frac{4}{3}$ définies sur $\mathbb{R}$ où k est un nombre réel.

d) f est solution sur $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle $y'=-3y+4$ donc il existe un nombre réel k tel que $f(x)=k\mathrm{e}^{-3x}+\frac{4}{3}$.

Or $f(-1)=0$, ainsi $k\mathrm{e}^{3}+\frac{4}{3}=0$ soit $k=-\frac{4}{3}\mathrm{e}^{-3}$.

Donc la solution sur $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle $y'=-3y+4$ qui vérifie $f(-1)=0$ est la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x)=-\frac{4}{3}\mathrm{e}^{-3}\mathrm{e}^{-3x}+\frac{4}{3}=-\frac{4}{3}\mathrm{e}^{-3-3x}+\frac{4}{3}.$$

78 Les solutions sur $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle $y' = 7y - 5$ sont les fonctions $x \mapsto ke^{7x} - \frac{-5}{7}$ soit $x \mapsto ke^{7x} + \frac{5}{7}$ définies sur $\mathbb{R}$ où k est un nombre réel.

f est solution sur $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle $y' = 7y - 5$ donc il existe un nombre réel k tel que $f(x) = ke^{7x} + \frac{5}{7}$.

Or $f(-2) = -3$, ainsi $ke^{-14} + \frac{5}{7} = -3$ soit $k = -\frac{26}{7}e^{14}$.

Donc la solution sur $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle $y' = 7y - 5$ qui vérifie $f(-2) = -3$ est la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = -\frac{26}{7}e^{14}e^{7x} + \frac{5}{7} = -\frac{26}{7}e^{14+7x} + \frac{5}{7}.$$

81 f est solution sur $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle $-2y' + 11y = 4$ donc, pour tout réel x, $-2f'(x) + 11f(x) = 4$. Donc $-2f'(-1) + 11f(-1) = 4$. Or $f'(-1) = 1$, ainsi $-2 + 11f(-1) = 4$

soit $f(-1) = \frac{6}{11}$.

Les solutions sur $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle $-2y' + 11y = 4$ soit $y' = \frac{11}{2}y - 2$ sont les fonctions

$x \mapsto ke^{\frac{11}{2}x} - \frac{-2}{\frac{11}{2}}$ soit $x \mapsto ke^{\frac{11}{2}x} + \frac{4}{11}$ définies sur $\mathbb{R}$

où k est un nombre réel.

f est solution sur $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle $-2y' + 11y = 4$ donc il existe un nombre réel k tel

que $f(x) = ke^{\frac{11}{2}x} + \frac{4}{11}$.

Or $f(-1) = \frac{6}{11}$, ainsi $ke^{-\frac{11}{2}} + \frac{4}{11} = \frac{6}{11}$ soit $k = \frac{2}{11}e^{\frac{11}{2}}$.

Donc la solution sur $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle $-2y' + 11y = 4$ qui vérifie $f'(-1) = 1$ est la fonction

f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \frac{2}{11}e^{\frac{11}{2}+\frac{11}{2}x} + \frac{4}{11}$.

Exercice V

0) g(0)=1 car initialement il y a un million de foyers avec écran plat.

1. **a.** $z = \dfrac{1}{y} \iff y\dfrac{1}{z}$. z est dérivable et $z' = -\dfrac{y'}{y^2} = -y'z^2 \iff y' = -\dfrac{z'}{z^2}$. On a donc :

$$y' = \frac{1}{20}y(10-y) \iff -\frac{z'}{z^2} = \frac{1}{20}\frac{1}{z}\left(10 - \frac{1}{z}\right) \iff z' = -\frac{1}{2}z + \frac{1}{20}.$$

b. Une solution constante évidente de E_1 est $z = \dfrac{1}{10}$.

Les solutions de l'équation différentielle $z' = -\dfrac{1}{2}z$ sont les fonctions $x \longmapsto Ke^{-\frac{x}{2}}$.

Les solutions de l'équation E_1 sont donc les fonctions
$x \longmapsto z(x) = Ke^{-\frac{x}{2}} + \dfrac{1}{10}$.

Les solutions de (E) sont donc les fonctions $x \longmapsto \dfrac{1}{Ke^{-\frac{x}{2}} + \frac{1}{10}}$.

2. g est une solution de (E) telle que $g(0) = 1 \iff \dfrac{1}{Ke^{-\frac{0}{2}} + \dfrac{1}{10}} = 1 \iff \dfrac{1}{K+0,1} = 1 \iff$

$1 = K + 0,1 \iff K = 0,9 = \dfrac{9}{10}$.

Finalement $g(x) = \dfrac{1}{\frac{9}{10}e^{-\frac{x}{2}} + \dfrac{1}{10}} = \dfrac{10}{9e^{-\frac{x}{2}}+1}$.

3. On a $g'(x) = -\dfrac{10 \times 9 \times \left(-\frac{1}{2}\right)e^{-\frac{x}{2}}}{\left(9e^{-\frac{x}{2}}+1\right)^2} = \dfrac{45e^{-\frac{x}{2}}}{\left(9e^{-\frac{x}{2}}+1\right)^2}$. Cette dérivée ne comportant que des termes positifs est positive : la fonction g est donc croissante sur $[0\,;\,+\infty[$.

4. On a $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} e^{-\frac{x}{2}} = 0$, donc $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} g(x) = 10$.

Ceci signifie qu'à long terme le nombre de foyers équipés de téléviseurs à écran plat va se rapprocher de 10 millions.

5. Il faut résoudre l'inéquation $g(x) > 5 \iff \dfrac{10}{9e^{-\frac{x}{2}}+1} > 5 \iff 2 > 9e^{-\frac{x}{2}} + 1 \iff 1 > 9e^{-\frac{x}{2}} \iff$ $\dfrac{1}{9} > e^{-\frac{x}{2}} \iff -\ln 9 > -\frac{x}{2} \iff \frac{x}{2} > \ln 9 \iff x > 2\ln 9$ soit environ 4,3 ans ou en 5 ans à 1 an près soit en 2010.

Exercice VI

1. Soit $f(x) = k$ une fonction constante définie sur $\mathbb{R}$ solution de (E_0).

On a donc $f' = f$ soit $0 = k$.

L'unique fonction constante solution de l'équation différentielle (E_0) est donc la fonction nulle.

2. Les solutions de l'équation différentielle (E_0) sont les fonctions de la forme

$f(x) = Ce^x$ avec $C \in \mathbb{R}$.

3. Pour tout réel x on a : $\quad h'(x) = -2\sin(x) + \cos(x)$.

D'autre part : $\quad h(x) - \cos(x) - 3\sin(x) = 2\cos(x) + \sin(x) - \cos(x) - 3\sin(x) =$

$\cos(x) - 2\sin(x)$

d'où pour tout réel x, $\quad h'(x) = h(x) - \cos(x) - 3\sin(x)$, c'est à dire, h est solution de l'équation différentielle (E).

4. Supposons que f soit une solution de (E).

Pour tout réel x on a :

$$\begin{aligned}(f-h)'(x) = f'(x) - h'(x) &\implies (f-h)'(x) = f(x) - \cos(x) - 3\sin(x) - (h(x) - \cos(x) - 3\sin(x)) \\ &\quad \text{car } f \text{ et } h \text{ sont solutions de } (E) \\ &\implies (f-h)'(x) = f(x) - \cos(x) - 3\sin(x) - h(x) + \cos(x) + 3\sin(x) \\ &\implies (f-h)'(x) = f(x) - h(x) = (f-h)(x)\end{aligned}$$

Donc $f - h$ est solution de (E_0)

Réciproquement : supposons que $f - h$ soit solution de (E_0)

On a donc $(f-h)'(x) = f(x) - h(x)$ soit $f'(x) - h'(x) = f(x) - h(x)$

D'où : $f'(x) = f(x) - h(x) + h'(x) = f(x) - h(x) + h(x) - \cos(x) - 3\sin(x)$ car h est solution de (E)

Donc : $f'(x) = f(x) - \cos(x) - 3\sin(x)$ c'est à dire f est solution de (E).

Conclusion : f est solution de (E) si et seulement si $f - h$ est solution de (E_0).

5. On a donc $f(x) - h(x) = Ce^x$ avec $C \in \mathbb{R}$

Toutes les solutions de l'équation différentielle (E) sont donc les fonctions

$f(x) = Ce^x + 2\cos(x) + \sin(x)$ avec $C \in \mathbb{R}$

6. g est solution de l'équation différentielle (E) donc il existe un réel C tel que

$g(x) = Ce^x + 2\cos(x) + \sin(x)$.

De plus $g(0) = 0$ donc $g(0) = Ce^0 + 2\cos(0) + \sin(0) = 0$.

D'où $C \times 1 + 2 \times 1 + 0 = 0 \iff C = -2$

On a donc : $\quad g(x) = -2e^x + 2\cos(x) + \sin(x)$.