Exercice n°1 :

1a. On a $\frac{293398}{18221965} \approx 0{,}016 \approx 1{,}6\%$.

b. De même $\dfrac{4921}{18221965} \approx 0{,}0003 < 0{,}001$ soit moins de 0,1 %.

2. **a.** Les 20 accouchements sont des évènements indépendants et la probabilité d'avoir une naissance est égale à 0,016, donc la variable X suit une loi binomiale $\mathscr{B}(20\,;\,0{,}016)$.

On a $p(X = 1) = 20 \times 0{,}016 \times 0984^{19} \approx 0{,}2355$ soit 0,236 au millième près.

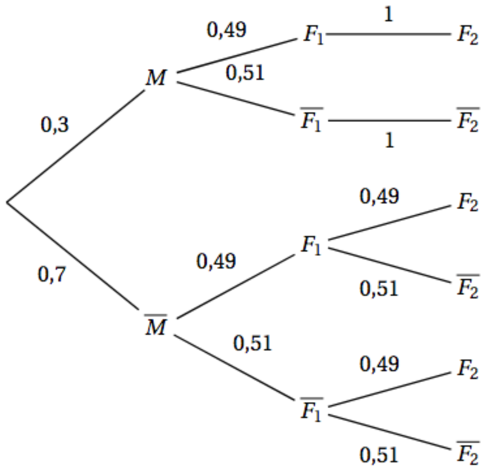
b. On a $p(X \geqslant 1) = 1 - p(X = 0) = 1 - 0{,}984^n \times 0{,}016^0 = 1 - 0{,}984^n$.

Il faut donc résoudre l'inéquation :

$1 - 0{,}984^n \geqslant 0{,}99 \iff 0{,}01 \geqslant 0{,}984^n \iff$ (par croissance de la fonction logarithme népérien) $\ln 0{,}01 \geqslant n \ln 0{,}984 \iff n \geqslant \dfrac{\ln 0{,}01}{\ln 0{,}984}$ soit $n \geqslant 285{,}5$.

Donc en moyenne, sur 286 accouchements il y a un accouchement double.

On acceptera aussi dans cette question un raisonnement utilisant uniquement la calculatrice.



3.

a. Voir ci-dessus

b. On a en suivant les première et troisième branche de l'arbre pondéré :

$p(F_1 \cap F_2) = 0{,}3 \times 0{,}49 \times 1 + 0{,}7 \times 0{,}49 \times 0{,}49 = 0{,}147 + 0{,}16807 = 0{,}31507 \approx 0{,}316.$

c. Sachant que les nouveaux-nés sont des jumelles, la probabilité qu'elles soient monozygotes est la probabilité conditionnelle :

$p_{F_1 \cap F_2}(M) = \dfrac{p(M \cap (F_1 \cap F_2))}{p(F_1 \cap F_2)} = \dfrac{0{,}3 \times 0{,}49 \times 1}{0{,}31507} \approx 0{,}4665$ soit 0,467 au millième près.

Exercice n°2 :

Partie A :

1. f est une fonction polynomiale donc dérivable sur $\mathbb{R}$ et sur cet intervalle :

$f(x) = 2x - 2x^2$, d'où $f'(x) = 2 - 4x = 2(1 - 2x)$.

On a :

- $f'(x) = 0 \iff 1 - 2x = 0 \iff x = \dfrac{1}{2}$;
- $f'(x) > 0 \iff 1 - 2x > 0 \iff x < \dfrac{1}{2}$; la dérivée est positive sur $\left[0\,;\,\dfrac{1}{2}\right]$, la fonction f est donc croissante sur cet intervalle.
- $f'(x) < 0 \iff 1 - 2x < 0 \iff x > \dfrac{1}{2}$;

2. On admet que pour tout entier naturel n, $0 \leqslant u_n \leqslant \frac{1}{2}$.
   - $u_1 = 2u_0(1-u_0) = 2 \times 0,3 \times 0,7 = 0,42$.
   - Démonstration par récurrence :

     — *Initialisation* : on a $u_0 \leqslant u_1$ car $0,3 \leqslant 0,42$.

     — *Hérédité* On suppose qu'il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $u_n \leqslant u_{n+1}$.

     Comme on suppose que $u_n \leqslant u_{n+1} \leqslant \frac{1}{2}$ on a par croissance de la fonction f sur $\left[0 ; \frac{1}{2}\right]$, $f(u_n) \leqslant f(u_{n+1}) \leqslant f\left(\frac{1}{2}\right)$, soit

     $u_{n+1} \leqslant u_{n+2} \leqslant 2 \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2}$, ou encore $u_{n+1} \leqslant u_{n+2} \leqslant \frac{1}{2}$: l'encadrement est vrai au rang $n+1$.

     La relation est vraie au rang 0 et si elle est vraie au rang $n \in \mathbb{N}$ elle l'est encore au rang $n+1$: d'après le principe de récurrence on a démontré que :

     pour tout rentier naturel n, $u_n \leqslant u_{n+1} \leqslant \frac{1}{2}$

3. Cet encadrement montre que

   — la suite (u_n) est croissante et

   — la suite (u_n) est majorée par $\frac{1}{2}$.

   Conclusion la suite (u_n) croissante et majorée converge vers une limite $\ell \leqslant \frac{1}{2}$.

4. La fonction f étant continue on a donc :

   $\lim\limits_{n \to +\infty} f(u_n) = \lim\limits_{n \to +\infty} 2u_n(1-u_n)$, soit

   $\ell = 2\ell(1-\ell) \iff \ell = 2\ell - 2\ell^2 \iff 2\ell^2 - \ell = 0 \iff \ell(2\ell-1) = 0 \iff \left\{\begin{array}{lll} \ell & = & 0 \\ 2\ell - 1 & = & 0 \end{array}\right. \iff$

   $\left\{\begin{array}{lll} \ell & = & 0 \\ \ell & = & \frac{1}{2} \end{array}\right.$ La seule solution acceptable est $\ell = \frac{1}{2}$.

Partie B :

1. Dans cette question $b = 0$.

   a. La relation de récurrence s'écrit alors $P_{n+1} - P_n = P_n(1 - 0 \times P_n)$, soit $P_{n+1} - P_n = P_n \iff P_{n+1} = 2P_n$, donc $P_{n+1} = 2P_n$: cette égalité montre que la suite (P_n) est une suite géométrique de raison 2 et de premier terme $P_0 = 3$.

   b. On sait quel que soit $n \in \mathbb{N}$, $P_n = P_0 \times 2^n = 3 \times 2^n$: la limite de la suite (P_n) est plus l'infini (irréaliste)

2. Dans cette question $b = 0,2$. On a donc $P_{n+1} - P_n = P_n(1 - 0,2P_n)$

   a. On a $v_0 = 0,1 \times P_0 = 0,1 \times 3 = 0,3$.

   La relation de récurrence devient :

   $P_{n+1} - P_n = P_n(1 - 0,2 \times P_n) \iff P_{n+1} - P_n = P_n - 0,2P_n^2$, d'où

   $P_{n+1} = 2P_n - 0,2P_n^2$. (1)

   Or $v_{n+1} = 0,1P_{n+1} = 0,1\left(2P_n - 0,2P_n^2\right) = 0,2\left(P_n - 0,1P_n^2\right)$.

   Comme $v_n = 0,1 \times P_n \iff 10v_n = P_n$, l'égalité ci-dessus devient :

   $v_{n+1} = 0,2\left(10v_n - 0,1 \times (10v_n)^2\right)$, soit

   $v_{n+1} = 0,2\left(10v_n - 10v_n^2\right) = 2v_n(1-v_n)$.

   b. La relation de la question précédente montre que la suite (v_n) est la suite (u_n) de la **Partie A** et on a vu que cette suite converge vers $\frac{1}{2}$.

   On a donc $\lim\limits_{n \to +\infty} v_n = \frac{1}{2}$.

   Or $P_n = 10v_n$, donc $\lim\limits_{n \to +\infty} P_n = 10 \times \frac{1}{2} = 5$.

   Finalement la population se rapprochera de 5 000 individus.

Exercice 3 : (M. Vialle et M. Haezebaert)

Affirmation 1 :

$\begin{cases} 2 = 4 + 2t \\ 1 = -3 - 4t \\ -4 = 5 + t \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -2 = 2t \\ 4 = -4t \\ -9 = t \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -1 = t \\ -1 = t \\ -9 = t \end{cases}$ ce système n'admet aucune solution donc $A \notin d_1$.

L'affirmation 1 est donc fausse.

Affirmation 2 :

$\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} 6-2 \\ -5-1 \\ 4-(-4) \end{pmatrix} = \overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} 4 \\ -6 \\ 8 \end{pmatrix}$. Soit $\vec{u}\begin{pmatrix} -10 \\ 15 \\ -20 \end{pmatrix}$. On a $\vec{u} = -2{,}5\overrightarrow{AB}$ donc $\vec{u}\begin{pmatrix} -10 \\ 15 \\ 20 \end{pmatrix}$ est un vecteur directeur de (AB).

Soit $M(10; -11; 12)$. $\overrightarrow{AM}\begin{pmatrix} 10-2 \\ -11-1 \\ 12-(-4) \end{pmatrix} = \overrightarrow{AM}\begin{pmatrix} 8 \\ -12 \\ 16 \end{pmatrix}$. Donc $\overrightarrow{AM} = 2\overrightarrow{AB}$ donc M appartient à (AB).

La droite (AB) passe par le point $M(10; -11; 12)$ et a pour vecteur directeur $\vec{u}\begin{pmatrix} -10 \\ 15 \\ 20 \end{pmatrix}$ donc $\begin{cases} x = 10 - 10t \\ y = -11 + 15t \\ z = 12 - 20t \end{cases}$

où $t \in \mathbb{R}$ est une représentation paramétrique de la droite (AB).

L'affirmation 2 est donc vraie.

Affirmation 3 :

Soient $\vec{v}\begin{pmatrix} 2 \\ -4 \\ 1 \end{pmatrix}$ un vecteur directeur de d_1 *et* $\vec{w}\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$ un vecteur directeur de d_2. Les coordonnées de $\vec{v}$ et $\vec{w}$ ne sont pas proportionnelles donc $\vec{v}$ et $\vec{w}$ ne sont pas colinéaires donc d_1 et d_2 ne sont pas parallèles.

Soit (E) le système $\begin{cases} 4 + 2t = 7 + t' \\ -3 - 4t = 2 + 3t' \\ 5 + t = -6 + t' \end{cases}$

$\begin{cases} 4 + 2t = 7 + t' \\ 5 + t = -6 + t' \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -3 + 2t = t' \\ 5 + t = -6 + (-3 + 2t) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -3 + 2t = t' \\ 5 = -9 + t \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -3 + 2 \times 14 = t' \\ 14 = t \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 25 = t' \\ 14 = t \end{cases}$

Or pour $\begin{cases} 25 = t' \\ 14 = t \end{cases}$ $-3 - 4t = -3 - 4 \times 14 = -59$ et $2 + 3t' = 2 + 3 \times 25 = 77$

Donc le système (E) n'admet aucune solution donc les droites d_1 et d_2 ne sont pas sécantes.

L'affirmation 3 est donc fausse.

Affirmation 4 :

$\overrightarrow{GM} = 2\overrightarrow{GD} + 4\overrightarrow{GE} + 2\overrightarrow{GF}$

$\overrightarrow{GN} = \overrightarrow{GD} + \overrightarrow{DN} = \overrightarrow{GD} + \frac{1}{2}\overrightarrow{DE} + \frac{1}{4}\overrightarrow{DF} = \overrightarrow{GD} + \frac{1}{2}(\overrightarrow{DG} + \overrightarrow{GE}) + \frac{1}{4}(\overrightarrow{DG} + \overrightarrow{GF}) = \overrightarrow{GD} + \frac{1}{2}\overrightarrow{DG} + \frac{1}{2}\overrightarrow{GE} + \frac{1}{4}\overrightarrow{DG} + \frac{1}{4}\overrightarrow{GF}$

Donc $\overrightarrow{GN} = \frac{1}{4}\overrightarrow{GD} + \frac{1}{2}\overrightarrow{GE} + \frac{1}{4}\overrightarrow{GF}$ Ainsi, $\overrightarrow{GM} = 8\overrightarrow{GN}$ donc, $\overrightarrow{GM}$ et $\overrightarrow{GN}$ sont colinéaires, donc G, M et N sont alignés.

L'affirmation 4 est donc vraie.

Exercice 3 : (M. Mancini)

$b = \ln(9) + \ln\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right) + \ln\left(\frac{1}{e^{2\ln(3)}}\right)$

$b = \ln(9) + \ln\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right) - \ln\left(e^{2\ln(3)}\right) = \ln(9) - \ln(\sqrt{3}) + 2\ln(3)$

$\boxed{b} = \ln(3^2) - \frac{1}{2}\ln(3) + 2\ln(3) = 2\ln(3) - \frac{1}{2}\ln(3) + 2\ln(3) = \boxed{-\frac{1}{2}\ln(3)}$

Affirmation 1 : Fausse.

$\frac{4}{2+e^{-2n}} > 1{,}999 \iff 4 > 1{,}999\left(2+e^{-2n}\right)$ car $2+e^{-2n} > 0$.

$\iff \frac{4}{1{,}999} > 2+e^{-2n} \iff e^{-2n} < \frac{4}{1{,}999} - 2$

$\iff e^{-2n} < \frac{4-3{,}998}{1{,}999}$

$\iff e^{-2n} < \frac{0{,}002}{1{,}999} \iff e^{-2n} < \frac{2}{1999}$

$\iff \ln(e^{-2n}) < \ln\left(\frac{2}{1999}\right)$ (par croissance de $\ln$ sur $]0;+\infty[$.

$\iff -2n < \ln\left(\frac{2}{1999}\right)$

$\iff n > -\frac{1}{2}\ln\left(\frac{2}{1999}\right)$. Avec calculatrice :

$-\frac{1}{2}\ln\left(\frac{2}{1999}\right) \simeq 3{,}45$

donc $n \geqslant 4$ (car n entier.) : Affirmation 2 : VRAIE

$\frac{\ln(x)-x^2+2}{3x^2} = \frac{\ln(x)}{3x^2} - \frac{x^2}{3x^2} + \frac{2}{3x^2} = \frac{1}{3}\frac{\ln(x)}{x^2} - \frac{1}{3} + \frac{2}{3}\times\frac{1}{x^2}$.

Par croissances comparées : $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{\ln(x)}{x^2} = 0$ et par limite de référence, $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{1}{x^2} = 0$.

donc par produit et somme de limites, $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{\ln(x)-x^2+2}{3x^2}\right) = -\frac{1}{3}$: Affirmation 3 : VRAIE

Soit f définie sur $]0;+\infty[$ par : $f(x) = x\ln(x)$. f est dérivable sur $]0;+\infty[$ et

$f'(x) = \ln(x)+1$. $f'(x) \geqslant 0 \iff \ln(x) \geqslant -1 \iff x \geqslant \frac{1}{e}$.

Par c.c : $\lim\limits_{x\to0^+} f(x) = 0$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} x\ln(x) = +\infty$ (produit). d'où le tableau : $f\left(\frac{1}{e}\right) = -\frac{1}{e}$

x	0		$\frac{1}{e}$		$+\infty$
$f(x)$	0	$\searrow$	$-\frac{1}{e}$	$\nearrow$	$+\infty$

OR $-\frac{1}{e} > -1$. donc $f(x) = -1$ n'a aucune solution sur $]0;+\infty[$ vu que sa valeur minimale est supérieure à -1. Affirmation 4 : FAUSSE

Exercice 4

Partie A :

1) La courbe représentative de la fonction g_a passe par le point B de coordonnées (0 ; 0,5) donc $g_a(0) = 0{,}5$.

Or $g_a(0) = \frac{1}{2a}(e^{a\times 0} + e^{-a\times 0}) = \frac{1}{2a}(e^0 + e^0) = \frac{1}{2a}(1+1) = \frac{1}{a}$ ainsi $\frac{1}{a} = 0{,}5$ d'où $a = \frac{1}{0{,}5} = 2$.

2) $g_a(x) = \frac{1}{2a}(e^{ax} + e^{-ax})$ donc $g_a{}'(x) = \frac{1}{2a}(ae^{ax} + (-ae^{-ax})) = \frac{1}{2a}(ae^{ax} - ae^{-ax})$.

Ainsi, $g_a{}'(0) = \frac{1}{2a}(ae^{a\times 0} - ae^{-a\times 0}) = \frac{1}{2a}(a - a) = 0$.

Le coefficient directeur $g_a{}'(0)$ de la tangente à la courbe de g_a au point d'abscisse 0 est égal à 0 donc la tangente à la courbe de g_a au point d'abscisse 0 est parallèle à l'axe des abscisses.

Partie B :

1)a) $f'(x) = 1 \times e^{2x} + (x-1)\times 2e^{2x} - 0 - 1 = 1e^{2x} + (2x-2)e^{2x} - 1 = (1 + 2x - 2)e^{2x} - 1$
$= (2x-1)e^{2x} - 1$.

1)b) $f'(0) = (2\times 0 - 1)e^{2\times 0} - 1 = -1e^0 - 1 = -1 - 1 = -2$.

1)c) $\lim\limits_{x\to+\infty} 2x = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} e^x = +\infty$ donc $\lim\limits_{x\to+\infty} e^{2x} = +\infty$ par composition.
$\lim\limits_{x\to+\infty} 2x - 1 = +\infty$ par produit et somme. Donc $\lim\limits_{x\to+\infty} (2x-1)e^{2x} = +\infty$ par produit
Ainsi $\lim\limits_{x\to+\infty} f'(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} (2x-1)e^{2x} - 1 = +\infty$ par somme.

2) Pour tout réel $x \geq 0$, $f''(x) = 2\times e^{2x} + (2x-1)\times 2e^{2x} - 0 = 2e^{2x} + (4x-2)e^{2x} = (2 + 4x - 2)e^{2x} = 4xe^{2x}$.

Pour tout réel $x > 0$, $4x > 0$ et $e^{2x} > 0$ donc $f''(x) = 4xe^{2x} > 0$ par produit, donc la fonction f' est strictement croissante sur l'intervalle $[0\,;\,+\infty[$.

3) Sur l'intervalle $[0\,;\,+\infty[$, f' est continue et strictement croissante à valeur dans $[-2\,;\,+\infty[$. Or $0 \in [-2\,;\,+\infty[$ donc d'après le corollaire du théorème des valeurs intermédiaires l'équation $f'(x) = 0$ admet une unique solution sur l'intervalle $[0\,;\,+\infty[$, nommée α.
À l'aide de la calculatrice la valeur de α arrondie au centième est $\alpha \approx 0{,}64$.

4) a)

x	0	α	$+\infty$
$f'(x)$	$-$		$+$
$f(x)$	-2 ↘	$f(\alpha)$	↗

b) Pour $x \in [0\,;\,\alpha]$, $0 \leq x \leq \alpha$ donc $f(0) \geq f(x) \geq f(\alpha)$ car la fonction f est décroissante sur $[0\,;\,\alpha]$ et $f(0) = -2$

D'où $-2 \geq f(x)$. Ainsi $f(x)$ est négatif pour tout $x \in [0\,;\,\alpha]$.

c) $f(2) = (2-1)e^{2\times 2} - 1 - 2 = e^4 - 3 \approx 51{,}6$.

Sur l'intervalle $[\alpha\,;2]$, f est continue et strictement croissante à valeur dans $[f(\alpha)\,;\,e^4 - 3]$. Or $0 \in [f(\alpha)\,;\,e^4-3]$ donc d'après le corollaire du théorème des valeurs intermédiaires l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution dans $[\alpha\,;2]$.

Sur l'intervalle $[0\,;\,\alpha[$, $-2 \geq f(x)$ donc l'équation $f(x) = 0$ n'admet aucune solution.
Sur l'intervalle $]2\,;\,+\infty[$, f est strictement croissante donc $f(x) \geq f(2) > 0$ donc l'équation $f(x) = 0$ n'admet aucune solution.
Ainsi l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution dans $[0\,;\,+\infty[$.

Si l'on note a cette valeur, à l'aide de la calculatrice : $1,19 < a < 1,2$.

5) a) D'après la question A)2), pour tout réel $x \geq 0$, $f''(x) = 4xe^{2x} \geq 0$ donc la fonction f est convexe sur $[0\ ;\ +\infty[$.

b) L'équation réduite de la tangente T à la courbe de f au point d'abscisse 1 est $y = f'(1)(x-1) + f(1)$.

Or $f'(1) = (2 \times 1 - 1)e^{2\times 1} - 1 = e^2 - 1$ et $f(1) = (1-1)e^2 - 1 - 1 = -2$.

D'où $f'(1)(x-1) + f(1) = (e^2-1)(x-1) - 2 = (e^2-1)x - e^2 + 1 - 2 = (e^2-1)x - e^2 - 1$

L'équation réduite de la tangente T à la courbe de f au point d'abscisse 1 est $y = (e^2-1)x - e^2 - 1$.

c) La fonction f est convexe sur $[0\ ;\ +\infty[$ donc sa courbe se situe au-dessus de chacune de ses tangentes sur $[0\ ;\ +\infty[$.

Donc pour tout réel $x \geq 0$, $f(x) \geq (e^2-1)x - e^2 - 1$.

d) $\lim\limits_{x\to+\infty} (e^2-1)x = +\infty$ par produit car $e^2 - 1 > 0$ donc $\lim\limits_{x\to+\infty} (e^2-1)x - e^2 - 1 = +\infty$ par somme.

Pour tout réel $x \geq 0$, $f(x) \geq (e^2-1)x - e^2 - 1$ donc, d'après le théorème de comparaison, $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$