CHAPITRE VIII PROBABILITES : l'étude des certitudes sur les incertitudes.

I – Vocabulaire des probabilités

Définition 1 On appelle expérience aléatoire toute expérience à plusieurs issues (ou résultats) possibles, dont on ne peut prévoir le résultat que l'on obtiendra en réalisant cette expérience.

Chacun des ***résultats possibles*** d'une expérience aléatoire donnée est appelé une ***issue*** de l'expérience aléatoire.

Exemple : Le jet d'un dé cubique dont les faces sont numérotées de 1 à 6 constitue une expérience aléatoire composée de ..6... issues possibles.

Définitions 2

L'ensemble de toutes les issues possibles pour une expérience aléatoire donnée est appelé l'univers des possibles, on le note en général Ω. = omega majuscule grec

Si on numérote chacune des issues possibles et qu'on les nomme $x_1, x_2, \ldots\ldots\ldots, x_n$ on a :
$\Omega = \{x_1, x_2, \ldots\ldots\ldots, x_n\}$. ↳ x indice 1

Au jeu de dé précédemment décrit, Ω = .{1, 2, 3, 4, 5, 6}......................

Le nombre d'élément d'un ensemble fini est appelé son cardinal, noté *card*.

Par exemple, $card(\Omega)$ = ..6.. pour l'exemple précédent.

Définition 3

Un événement est une partie (ou un sous-ensemble) de l'univers des possibles Ω.

Un événement élémentaire est une partie de Ω formé d'une seule éventualité, c'est-à-dire un sous-ensemble de Ω ne contenant qu'un seul élément.

Exemples

Au jeu précédent, soit A = *" Obtenir un chiffre pair "*: A est un événement, et $A = \{2 ; 4 ; 6\}$.

B = *" Obtenir deux comme résultat "* est un événement élémentaire, et $B = \{2\}$.

Culture : un ensemble formé d'un seul élément est appelé un singleton.

Définitions 4 : Soit A un événement, et ω un élément de A : ω est donc une issue de Ω.
↳ omega minuscule

On dit que ω réalise l'événement A.

Par exemple, au jeu précédent, $2 \in A$: l'issue 2 réalise l'événement A.

On appelle ***événement impossible*** un événement qui ne peut pas être réalisé lors d'une expérience aléatoire donnée.

Exemple : Obtenir 7 au jeu de dé précédent est un événement impossible.

Un *événement* A est dit certain si $A = \Omega$ ***: la réalisation de A est une certitude !***

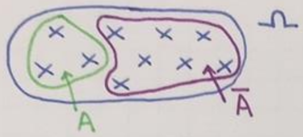
Exemple : Obtenir un résultat inférieur ou égal à 6 au précédent jeu est un événement certain !

Définition 5

Soit A un événement d'un univers Ω.

L'événement contraire de A, que l'on note $\bar{A}$, est formé des issues non favorables à la réalisation de A.
↳ lire A barre

Illustration



Remarque

D'un point de vue ensembliste, on dit que $\bar{A}$ est le complémentaire de A dans Ω.

Exemples

1) Au jeu précédent de dé, l'événement contraire de A est l'événement :
"Obtenir un chiffre impair."

On a donc : $\bar{A} = \{1 ; 3 ; 5\}$

2) Dans une tombola, on vend cent tickets numérotés de 1 à 100. L'expérience aléatoire consiste ici à acheter un billet parmi les 100 vendus.

Soit A l'événement : *"Acheter un ticket dont le numéro est supérieur ou égal à 5"*.

Déterminer l'événement contraire de A, et l'écrire sous forme ensembliste.

$\bar{A}$ = " Acheter un ticket dt le n° est strictement inférieur à 5". Donc $\bar{A} = \{1, 2, 3, 4\}$.

II - Loi de probabilité sur un ensemble fini

Définition 6

$\Omega = \{x_1 ; x_2 ; \ldots\ldots ; x_n\}$ désigne l'univers des possibles d'une expérience aléatoire donnée.

Définir une loi de probabilité sur Ω, c'est associer à chacune des issues $x_1, x_2, \ldots\ldots, x_n$ des nombres réels notés $p_1, p_2, \ldots\ldots, p_n$ tels que :

- Pour tout entier i compris entre 1 et n, $0 \leq p_i \leq 1$ (ts les nb $p_1, p_2, \ldots, p_n$ appartient à $[0 ; 1]$)
- la somme de ttes ces proba est égale à 1 : $p_1 + p_2 + \ldots p_n = 1$

Le réel p_i est appelé la probabilité de l'issue x_i.

En pratique, quand on demande de *donner une loi de probabilité* associée à une expérience aléatoire, on consigne les résultats dans un *tableau à double entrée*, l'une consignant les différentes issues possibles, l'autre les probabilités associées à chacune de ces issues.

On s'assurera que la somme des probabilités associées aux différentes issues possibles d'une expérience aléatoire est toujours égale à ..1.. Cela constituera un critère de vérification dans les exercices que nous verrons plus loin.

Exemple

Donner la loi de probabilité associé au jet d'un dé non truqué, et on lit le numéro obtenu sur la face supérieure du dé.

La probabilité de chaque issue est égale à .$\frac{1}{6}$.

La loi de probabilité de cette expérience aléatoire est :

Issues	1	2	3	4	5	6
Probabilités	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$

III- Situations d'équiprobabilité

Définition 7

On considère une expérience aléatoire ayant n issues possibles, avec n entier supérieur ou égal à 2.

On dit qu'on est en ***situation d'équiprobabilité*** si et seulement si ***chacune des issues*** possibles de cette expérience aléatoire ***a la même probabilité de réalisation*** égale à .$\frac{1}{n}$....

C'est le cas dans l'exemple précédent !

Bien souvent, l'énoncé indique implicitement les situations d'équiprobabilité : dé non truqué,.......

Définition 8

Soit A un événement de Ω.

On appelle probabilité de l'événement A, le nombre réel noté $p(A)$ égal à la somme des probabilités des issues qui réalisent l'événement A.

La probabilité d'un événement est un nombre réel compris entre 0 et .1.

Exercice 1 : A l'expérience aléatoire précédente, nommons A l'événement obtenir un résultat pair.

Décrire l'événement A puis calculer $p(A)$.

A = "Obtenir un résultat pair"

$A = \{2, 4, 6\}$

Donc $p(A) = \frac{1}{6} + \frac{1}{6} + \frac{1}{6} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$.

Exercice 2

On jette un dé de forme tétraédrique (4 faces triangulaires) une fois.

On s'intéresse au nombre qui apparait au sommet du tétraèdre (1 sur le dessin ci-dessus).

1) Compléter le tableau suivant qui donne la loi de probabilité associé à cette expérience aléatoire :

Issues	*1*	*2*	*3*	*4*
probabilités	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{4}$	$p = \frac{1}{2}$

Soit p la proba d'obtenir 4 ̂e issue :

On a : $\frac{1}{12} + \frac{1}{6} + \frac{1}{4} + p = 1$

$p = 1 - \frac{1}{12} - \frac{1}{6} - \frac{1}{4} = \frac{6}{12} = \frac{1}{2}$.

Rq : ce dé est truqué, et le 4 est l'issue la + probable.

2) Déterminer la probabilité de chacun des événements suivants :

A = *"Obtenir un résultat impair "*. B = *" Obtenir un nombre premier "*.

↳ 2, 3, 5, 7, 11...

un nb entier est 1er lorsqu'il a exa 2 diviseurs distincts : 1 et lui m̂.

- $A = \{1, 3\}$

$p(A) = \frac{1}{4} + \frac{1}{12} = \frac{3}{12} + \frac{1}{12} = \frac{4}{12} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$.

- $B = \{2, 3\}$

$p(B) = \frac{1}{6} + \frac{1}{4} = \frac{4}{24} + \frac{6}{24} = \frac{10}{24} = \frac{5}{12}$

Propriété fondamentale

Dans une situation d'équiprobabilité, la probabilité d'un événement quelconque A de Ω est égale à :

$$p(A) = \frac{\text{Nb de cas favorables à la réalisa° de A}}{\text{Nb total de cas}} = \frac{\text{Nb d'issues réalisant A}}{\text{Nb total d'issues de } \Omega} = \frac{\text{card}(A)}{\text{card}(\Omega)}$$

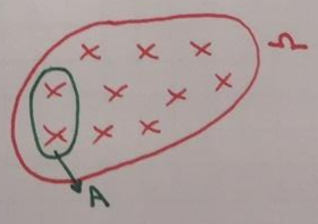
Justification : $\Omega = \{x_1 ; x_2 ; \dots x_N\}$ et $n = \text{card}(\Omega)$

A est une partie de Ω et chaq issue qui réalise l'événement A par probabilité $p = \frac{1}{n}$.

Donc $\underbrace{(\text{nb d'issues réalisant A})}_{} \times \frac{1}{n} = P(A)$

$\text{card}(A) \times \frac{1}{n} = P(A)$

Donc $\frac{\text{card}(A)}{\text{card}(\Omega)} = P(A)$



Exercice 3

Un jeu de tarot est constitué de 78 cartes différentes et indiscernables, retournées (non visibles).

L'univers est l'ensemble des 78 cartes : (52 cartes réparties en 4 collections cœur, carreau, pique, trèfle, contenant chacune : un as, un 2, un 3, un 4, un 5, un 6, un 7, un 8, un 9, un 10, un valet, une dame, un roi) + 4 cavaliers (un de cœur, un de carreau, un de pique,un de trèfle) + 21 atouts + 1 excuse).

On tire au hasard une carte de ce jeu de tarot.

a) Expliquer pourquoi on est en situation d'équiprobabilité.

b) Donner un événement élémentaire.

c) Quelle est la probabilité d'obtenir : ***i)*** Le cavalier de cœur ; ***ii)*** Un atout ; ***iii)*** Une figure.

a) Car chaq carte n'apparait qu'une seule fois.

b) Soit A l'événement : " Piocher la dame de pique ".
A est un événement élémentaire !

c) i) C = " Piocher le cavalier de cœur ".

$P(C) = \frac{1}{78}$ (car situa° d'équiprobabilité).

ii) K = " Piocher un atout ".

$P(K) = \frac{21}{78} = \frac{3 \times 7}{3 \times 26} = \frac{7}{26}$

iii) J = " Piocher une figure ". Figure = valets, dames, rois

$P(J) = \frac{12}{78} = \frac{6 \times 2}{6 \times 13} = \frac{2}{13}$.

Exercice 4

On lance simultanément deux dés tétraédriques équilibrés, l'un bleu, l'autre vert, dont les faces sont numérotées de 1 à 4.

1) Décrire mathématiquement l'univers des possibles Ω de cette expérience, en précisant le cardinal de Ω.

2) A-t-on une situation d'équiprobabilité sur Ω ?

3) On s'intéresse au produit des résultats obtenus sur chacun des deux dés.

Calculer la probabilité de l'événement A : " le produit obtenu est égal à 6".

4) On prend maintenant pour univers des possibles associé à cette expérience aléatoire, l'ensemble Ω' des différents produits possibles.

En s'aidant d'un tableau à double entrée, décrire Ω'. Est-on en situation d'équiprobabilité sur Ω' ?

1) $\Omega = \{(1;1); (1;2); (1;3); (1;4); (2;1); (2;2); (2;3); (2;4); (3;1); (3;2); (3;3); (3;4)$
$(4;1); (4;2); (4;3); (4;4)\}$

=> Les éléments de Ω sont ici des couples.
Ici, card $(\Omega) = 16$.

2) Car chaq couple n'apparait qu'une seule fois. (⚠ tenir compte des couleurs !)

3) A = "Obtenir 6 comme produit".

$A = \{(2;3); (3;2)\}$: Il y a dc 2 issues favorables à la réalisa° de A et on est en situa° d'équiprobab

Donc $P(A) = \frac{2}{16} = \frac{1}{8}$.

$\tilde{A}$ = "Obtenir un produit impair".

$\tilde{A} = \{(1;1); (1;3); (3;1); (3;3)\}$

Donc $P(\tilde{A}) = \frac{4}{16} = \frac{1}{4}$.

4)

dé vert \ dé bleu	1	2	3	4
1	1	2	3	4
2	2	4	6	8
3	3	6	9	12
4	4	8	12	16

Donc $\Omega' = \{1, 2, 3, 4, 6, 8, 9, 12, 16\}$ et card$(\Omega') = 9$.

⚠ Il n'y a pas équiprobabilité sur Ω' car :

U = "obtenir 1 comme produit"

$p(U) = \frac{1}{16}$ et s'il y avait équiprobabilité sur Ω', on devra

avoir : $p(U) = \frac{1}{\text{card}(\Omega')} = \frac{1}{9}$: ce qui n'est pas le cas.

✂

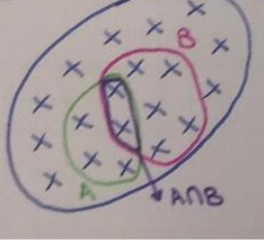
IV – Calcul de probabilités

i) Définition de l'intersection

Soient A et B deux événements d'un même univers Ω.

L'intersection des événements A et B, notée $A \cap B$ (lire A inter B), est l'événement formé des issues qui ***réalisent à la fois l'événement A et l'événement B.***

Illustration



Exercice 5

Une urne contient dix billes respectivement numérotées de 1 à 10. On extrait au hasard une bille de l'urne.

Soit A l'événement : *"Obtenir un numéro de bille qui est un multiple de 3".*

Soit B l'événement : *"Obtenir un numéro de bille au maximum égal à 4".*

a) Décrire A, B, puis déterminer l'événement $A \cap B$.

b) Soit C l'événement : "Obtenir un multiple de 4".

Déterminer l'événement $A \cap C$.

Soit Ω l'univers des possibles de cette expérience aléatoire :

$\Omega = \{1;2;3;4;5;6;7;8;9;10\}$.

a) A = " Obtenir un n° de bille qui est un multiple de 3".

$A = \{3;6;9\}$. $p(A) = \frac{3}{10}$.

B = " Obtenir un n° de bille au max égal à 4"

$B = \{1;2;3;4\}$. $p(B) = \frac{4}{10} = \frac{2}{5}$.

Donc : $A \cap B = \{3\}$. $p(A \cap B) = \frac{1}{10}$

b) C = " Obtenir un multiple de 4".

$C = \{4;8\}$. $p(C) = \frac{2}{10} = \frac{1}{5}$.

$A \cap C$ = " Obtenir un n° qui est à la fois un multiple de 3 et un multiple 4."

$A \cap C = \emptyset$; $A \cap C$ est un évènement impossible.

Définition

Lorsque $A \cap B = \varnothing$, on dira que A et B sont deux événements *incompatibles,* c'est-à-dire qu'ils *ne peuvent pas être réalisés simultanément !*

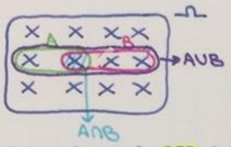
C'est par exemple le cas des événements A et C de l'exemple précédent !

ii) Définition de la réunion

Soient A et B deux événements d'un même univers Ω.

La *réunion* des événements A et B, notée $A \cup B$ (lire A union B), est l'événement formé des issues qui réalisent ***au moins un*** des deux événements A ou B.

Illustration



est contenue de

$\underline{A \cap B} \subset \underline{A} \subset \underline{A \cup B}$

$\underline{A \cap B} \subset \underline{B}$

Attention, en mathématiques, le OU n'a pas le même sens que dans le langage quotidien !

Dans le langage quotidien, la phrase *"aller ou cinéma ou aller jouer au tennis"* désigne un OU exclusif et est comprise par : soit on va au cinéma, soit on va jouer au tennis.

En mathématiques, la précédente phrase signifie faire ***au moins*** une des deux activités. Le OU est inclusif en mathématiques.

On veillera aussi à ne pas confondre les symboles $\cup$ et $\cap$.

Exemple

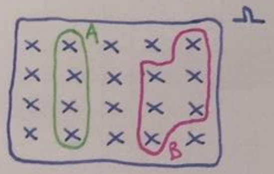
Déterminer $A \cup B$ puis $A \cup C$ dans chacun des deux exemples de l'exercice 5.

$\left.\begin{array}{l} A = \{3;6;9\} \\ B = \{1;2;3;4\} \end{array}\right\} \rightarrow A \cup B = \{1;2;3;4;6;9\}.$

$C = \{4;8\}$ donc $A \cup C = \{3;4;6;8;9\}.$

> ***Théorème (additivité)***
>
> Soit A et B deux événements incompatibles (c'est-à-dire que $A \cap B = \varnothing$) d'un même univers Ω.
>
> On a : $p(A \cup B) = p(A) + p(B)$

Illustration :



Pr ? : $p(A) = \dfrac{\text{card}(A)}{\text{card}(\Omega)}$; $p(B) = \dfrac{\text{card}(B)}{\text{card}(\Omega)}$

et $p(A \cup B) = \dfrac{\text{card}(A \cup B)}{\text{card}(\Omega)} = \dfrac{\text{card}(A) + \text{card}(B)}{\text{card}(\Omega)} = \dfrac{\text{card}(A)}{\text{card}(\Omega)} + \dfrac{\text{card}(B)}{\text{card}(\Omega)}$

$p(A \cup B) = p(A) + p(B)$

Exercice 6

Un jeu de cartes est constitué de 32 cartes réparties en quatre collections : cœur, carreau, pique et trèfle, chacune des collections étant constituée de : un 7, un 8, un 9, un 10, un valet, une dame, un roi et un as.

Enfin, les cartes de cœur et carreau sont de couleur rouge, et les cartes de pique et trèfle sont de couleur noire.

On tire au hasard une carte de ce jeu de cartes.

Soit A l'événement : *"Obtenir un as"*, et B l'événement : *"Obtenir un valet"*.

Déterminer A, B, puis $p(A)$, $p(B)$ et enfin $p(A \cup B)$.

$A = \{$as ♥ ; as ♦ ; as ♣ ; as ♠$\}$

$p(A) = \frac{4}{32} = \frac{1}{8}$.

$B = \{$valet ♥ ; valet ♦ ; valet ♣ ; valet ♠$\}$

$p(B) = \frac{4}{32} = \frac{1}{8}$.

$A \neq B$ mais $p(A) = p(B)$

$A \cup B$ = "Obtenir un as <u>ou</u> un valet"

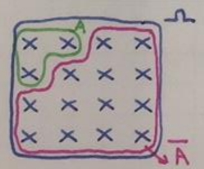
$p(A \cup B) = p(A) + p(B) = \frac{1}{8} + \frac{1}{8} = \frac{2}{8} = \frac{1}{4} = 0{,}25$

♥ *Théorème* (probabilité d'un événement contraire)♥

Pour tout événement A de Ω, on a :

$p(\bar{A}) = 1 - p(A)$

Preuve :



$A \cup \bar{A} = \Omega$ et $A \cap \bar{A} = \emptyset$

Donc par propriété d'additivité : $p(A \cup \bar{A}) = p(\Omega)$

$$p(A) + p(\bar{A}) = 1$$

Donc $p(\bar{A}) = 1 - p(A)$.

Exemple

Décrire chacun des événements : $\bar{A}$, puis $\bar{B}$ de l'exemple précédent, puis déterminer $p(\bar{A})$ puis $p(\bar{B})$.

A = "Obtenir un as"

$\bar{A}$ = "Ne pas obtenir d'as"

$p(\bar{A}) = 1 - p(A) = 1 - \frac{1}{8} = \frac{7}{8}$.

B = "Obtenir un valet"

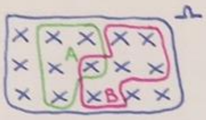
$\bar{B}$ = "Ne pas obtenir un valet"

$p(\bar{B}) = 1 - p(B) = 1 - \frac{1}{8} = \frac{7}{8}$.

Théorème fondamental (calcul de $p(A \cup B)$ lorsque A et B sont deux événements quelconques)

♥♥ $p(A \cup B) =$ $p(A) + p(B) - p(A \cap B)$ ♥♥

Preuve :



card $(A \cup B) =$ card (A) + card (B) − card $(A \cap B)$

Donc : $\dfrac{\text{card}(A \cup B)}{\text{card}(\Omega)} = \dfrac{\text{card}(A) + \text{card}(B) - \text{card}(A \cap B)}{\text{card}(\Omega)}$

$p(A \cup B) = \dfrac{\text{card}(A)}{\text{card}(\Omega)} + \dfrac{\text{card}(B)}{\text{card}(\Omega)} - \dfrac{\text{card}(A \cap B)}{\text{card}(\Omega)}$

Conclusion : $p(A \cup B) = p(A) + p(B) - p(A \cap B)$

Rq : On peut aussi retenir cette formule sous la forme :

$p(A \cup B) + p(A \cap B) = p(A) + p(B)$.

Exercice 7

Dans un lycée, la probabilité qu'un élève de première fasse la spécialité Mathématiques est égale à 0,8, $= p(A)$ et celle qu'il fasse la spécialité *SES* est égale à 0,4, $= p(B)$ et la probabilité qu'il fasse ces deux spécialités est égale à 0,3. $= p(C) = p(A \cap B)$

On choisit au hasard un élève de première, et on note A l'événement : *"l'élève suit la spécialité Mathématiques"* et B l'événement : *"l'élève suit la spécialité SES"*.

i) Soit C l'événement : l'élève suit les spécialités Mathématiques et *SES*". Ecrire C en fonction de A et B, puis donner $p(C)$.

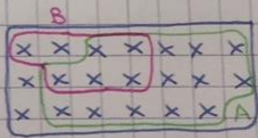
ii) Décrire par une phrase l'événement $A \cup B$, puis calculer la probabilité de cet événement.

iii) Déterminer la probabilité qu'un élève ne fasse ni la spécialité Mathématiques, ni la spécialité *SES*.

i) $C = A \cap B$

$p(C) = 0,3$

ii) $A \cup B$: " L'élève fait maths ou SES "



* $A \cup B$: " L'élève fait au moins l'une des 2 spé maths ou SES ".

Or $p(A \cup B) = p(A) + p(B) - p(A \cap B)$

$p(A \cup B) = 0,8 + 0,4 - 03 = 1,2 - 0,3 = 0,9$.

iii) Logique : Ni maths, ni SES est le contraire de : " Maths ou SES ".

Ici, on cherche donc la valeur de : $p(\overline{A \cup B})$.

Or, $p(\overline{A \cup B}) = 1 - p(A \cup B) = 1 - 0,9 = 0,1$.

La probabilité de ne faire ni maths ni SES est égale à 0,1.

Ex
1)
2)
un

Exercice 8

Un sac opaque contient 50 jetons numérotés de 0 à 49.

On prélève au hasard un jeton de ce sac, et on note le nombre qu'il porte.

Considérons les événements suivants :

A : *"Le nombre obtenu est divisible par 5"*.

B : *"Le nombre obtenu est un multiple de 8"*.

C : *"Le nombre obtenu est un nombre premier"*.

Déterminer : $p(A)$, $p(A \cap B)$, $p(A \cup C)$, $p(B \cup C)$, $p(\bar{B} \cap \bar{C})$.
$p(B), p(C),$

$\Omega = \{0; 1; 2 \dots ; 48; 49\}$

$\text{card}(\Omega) = 50$

$A = \{0; 5; 10; 15; 20; 25; 30; 35; 40; 45\}$

Donc $p(A) = \dfrac{\text{card}(A)}{\text{card}(\Omega)}$ car situation d'équiprobabilité

$p(A) = \dfrac{10}{50} = \dfrac{1}{5}$.

$B = \{0; 8; 16; 24; 32; 40; 48\}$

Donc $p(B) = \dfrac{\text{card}(B)}{\text{card}(\Omega)} = \dfrac{7}{50} = 0{,}14$.

$C = \{2; 3; 5; 7; 11; 13; 17; 19; 23; 29; 31; 37; 41; 43; 47\}$

Donc $p(C) = \dfrac{\text{card}(C)}{\text{card}(\Omega)} = \dfrac{15}{50} = \dfrac{3}{10} = 0{,}3$.

$A \cap B$: " Le nb obtenu est divisible par 5 et est un multiple de 8".

$A \cap B = \{0; 40\}$

$p(A \cap B) = \dfrac{\text{card}(A \cap B)}{\text{card}(\Omega)} = \dfrac{2}{50} = \dfrac{1}{25} = 0{,}04$.

$A \cup C$: " Le nb obtenu est divisible par 5 ou un nb premier"

M1 $A \cup C = \{0; 2; 3; 5; 7; 10; 13; 15; 17; 19; 20; 23; 25; 29; 30; 31; 35; 37; 40; 41; 43; 45; 47\}$

Donc $p(A \cup C) = \dfrac{\text{card}(A \cup C)}{\text{card}(\Omega)} = \dfrac{24}{50} = 0{,}48$.

M2 $p(A \cup C) = p(A) + p(C) - p(A \cap C)$ avec : $A \cap C = \{5\}$ Donc $p(A \cap C) = \dfrac{1}{50} = 0{,}02$.

Donc $p(A \cup C) = 0{,}2 + 0{,}3 - 0{,}02 = 0{,}48$.

$p(B \cup C) = p(B) + p(C) - p(B \cap C) = 0{,}14 + 0{,}3 - p(B \cap C)$.

↳ avec $B \cap C$: "le nb obtenu est un multiple de 8 et un nb premier".

Rq : $B \cap C = \varnothing$: évènement impossible

Donc $p(B \cap C) = 0$

Conclusion : $p(B \cup C) = 0{,}14 + 0{,}3 - 0 = 0{,}44$.

$\bar{B} \cap \bar{C}$: "Nb ni premier, ni multiple de 8".

Rq : $\bar{B} \cup \bar{C} = \overline{B \cup C}$

Donc $p(\bar{B} \cup \bar{C}) = p(\overline{B \cup C}) = 1 - p(B \cup C)$

$p(\bar{B} \cup \bar{C}) = 1 - 0{,}44 = 0{,}56$.

V-Arbre de probabilités

Nous allons voir que le calcul des probabilités est facilité par la représentation de l'expérience aléatoire.

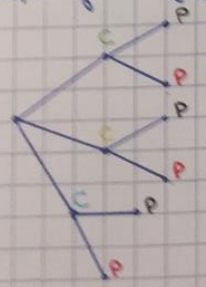
Les arbres de probabilité permettent de calculer efficacement des probabilités !

A-Le principe multiplicatif

Exemple 1

Dans un placard, vous disposez de 3 chemises, une verte, une orange et une bleue, et de deux pantalons, un noir et un rouge. Vous prenez au hasard une chemise et un pantalon. Combien de choix différents pouvez-vous faire ?

Au total, il y a 6 façons différentes de s'habiller.



Il y a "6 chemin sur l'arbre", càd 6 façons de s'habiller.

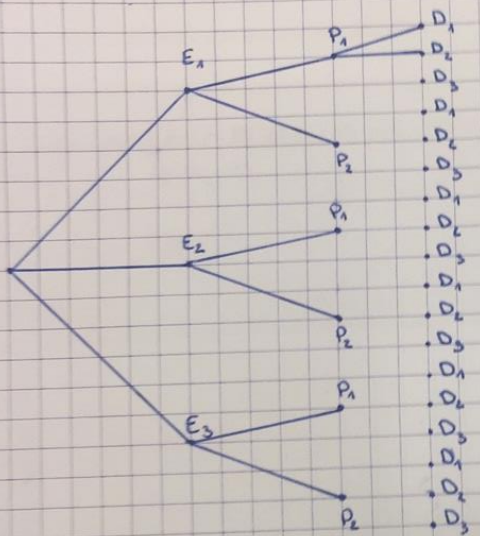
Rq : $3 \times 2 = 6$.

Exemple 2

Au restaurant, vous avez le choix entre 3 entrées, 2 plats et 3 desserts.

Votre repas est composé d'une entrée, un plat et un dessert.

Combien de repas différents pouvez-vous constituer ?



Entrées : E_1, E_2, E_3
Plats : P_1, P_2
Desserts : D_1, D_2, D_3

Il y a 18 chemins sur cet arbre, càd on peut composer 18 repas différents.

Rq : $3 \times 2 \times 3 = 18$.

Exemple 3

Le code *PIN* de votre vieux téléphone *PHONE I* est constitué de quatre chiffres.

a) Combien de codes *PIN* différents existe-t-il ?

b) Combien y-a-t-il de codes *PIN* à quatre chiffres distincts ?
↳ aucun chiffre pareil

a) Le nb total de codes PIN est, d'après le principe multiplicatif : $10 \times 10 \times 10 \times 10 = 10^4 = 10\,000$.

b) ☐ ☐ ☐ ☐ → 7 choix
10 choix 9 choix 8 choix

Ici, il y a : $10 \times 9 \times 8 \times 7 = 5\,040$ codes PIN à 4 chiffres distincts (= 2 à 2 différents).

B- Visualisation de toutes les issues possibles d'une expérience aléatoire grâce à un arbre de probabilités

Exemple

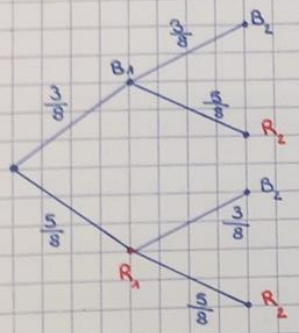
Une urne contient 3 boules blanches, et 5 boules rouges. Un joueur tire au hasard une première boule de l'urne, la repose dans l'urne, puis procède à un deuxième tirage au hasard d'une boule de l'urne.

Essayons de donner une représentation de cette expérience aléatoire qui facilitera le calcul des probabilités :

On note : B_1 (respectivement B_2) l'événement : obtenir une boule blanche au premier tirage (respectivement au second tirage) et R_1 (respectivement R_2) l'événement obtenir une boule rouge au premier tirage (respectivement au second tirage).

Faisons un arbre pondéré (= arbre de probabilités) :

$p(B_1) = \frac{3}{8}$; $p(R_1) = \frac{5}{8}$



Déterminer, dans l'exemple précédent, la probabilité de l'événement A : *"obtenir deux boules blanches"*.

Même question avec l'événement B : *"obtenir deux boules rouges"*.

En déduire la probabilité de l'événement C : *"obtenir un tirage bicolore"*.

$A = B_1 \cap B_2$

D'après le principe multiplicatif :

$p(A) = \frac{3}{8} \times \frac{3}{8} = \frac{9}{64}$.

$B = R_1 \cap R_2$

$p(B) = \frac{5}{8} \times \frac{5}{8} = \frac{25}{64}$.

$C = (B_1 \cap R_2) \cup (R_1 \cap B_2)$ # cours : Si A et B sont incompatibles alors : $p(A \cup B) = p(A) + p(B)$.

événements incompatibles

Donc : $p(C) = P(B_1 \cup R_2) + P(R_1 \cap B_2)$

$p(C) = \frac{3}{8} \times \frac{5}{8} + \frac{5}{8} \times \frac{3}{8} = 2 \times \frac{3}{8} \times \frac{5}{8} = 2 \times \frac{15}{64} = \frac{30}{64} = \frac{15}{32}$.

1)
2)
un

Remarques fondamentales concernant les arbres :

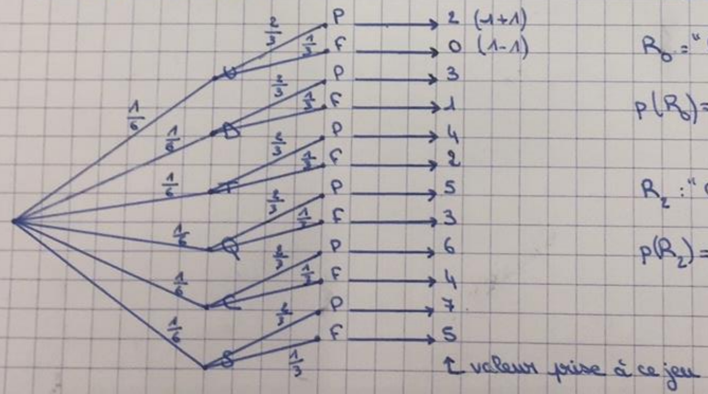
- La probabilité d'un événement est égale …au produit……… des probabilités figurant sur le chemin conduisant à cet événement.
- Au départ d'un nœud, les branches issues de ce dernier portent des probabilités dont la somme est égale à .1.
- Lorsqu'un événement correspond à la réunion de plusieurs chemins de l'arbre, pour calculer la probabilité de ce dernier, on ….additionne…………. les probabilités associées à ..chacun. de ces chemins.

Exercice 9

Un jeu consiste à lancer un dé cubique non truqué et une pièce truquée, telle que la probabilité d'apparition du pile soit égale à $\frac{2}{3}$.

Au nombre apparu sur la face supérieure du dé, ***on ajoute 1 si Pile est sorti***, et ***on soustrait 1 sinon.*** Déterminer la loi de probabilité de ce jeu.

U = "un" Q = "quatre"
D = "deux" C = "cinq"
T = "trois" S = "six"



Ici $\Omega = \{0; 1; 2; 3; 4; 5; 6; 7\}$.

R_0 : "0 ĉ résultat"

$p(R_0) = \frac{1}{6} \times \frac{1}{3} = \frac{1}{18}$. De m̂ $p(R_1) = \frac{1}{18}$.

R_2 : "Obtenir 2 ĉ issue"

$p(R_2) = \frac{1}{6} \times \frac{2}{3} + \frac{1}{6} \times \frac{1}{3} = \frac{2}{18} + \frac{1}{18} = \frac{3}{18} = \frac{1}{6}$.

$p(R_3) = \frac{1}{6} \times \frac{2}{3} + \frac{1}{6} \times \frac{1}{3} = \frac{3}{18} = \frac{1}{6}$

$p(R_4) = \frac{1}{6} \times \frac{2}{3} + \frac{1}{6} \times \frac{1}{3} = \frac{1}{6}$

$p(R_5) = \frac{1}{6}$

$p(R_6) = \frac{1}{6}$

$p(R_7) = \frac{1}{6} \times \frac{2}{3} = \frac{2}{18} = \frac{1}{9}$

D'où la loi de probabilité :

valeurs	0	1	2	3	4	5	6	7
proba.	$\frac{1}{18}$	$\frac{1}{18}$	$\frac{3}{18}$	$\frac{3}{18}$	$\frac{3}{18}$	$\frac{3}{18}$	$\frac{2}{18}$	$\frac{2}{18}$

F : être une fille

G : être un garçon

Exercice 10

On considère qu'à la naissance, les caractères " Naître fille " et " Naître garçon " sont équiprobables.

Quelle est la probabilité, dans une famille de 3 enfants, de chacun des événements suivants :

1) D: "avoir exactement deux filles ". $p(D) = 0,5 \times 0,5 \times 0,5 + 0,5 \times 0,5 \times 0,5 + 0,5 \times 0,5 \times 0,5$

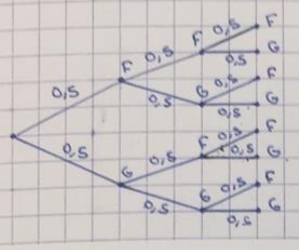
$p(D) = 3 \times 0,5 \times 0,5 \times 0,5 = 0,375 = \frac{3}{8}$.

2) A: "n'avoir aucun garçon ". $p(A) = 0,5^3 = 0,125 = \frac{1}{8}$

3) M: "avoir au moins une fille ". $p(\overline{M}) = \frac{1}{8}$ donc $p(\overline{M}) = 1 - p(M)$ donc $p(M) = 1 - \frac{1}{8} = \frac{7}{8}$.

4) N: "avoir au plus un garçon ". $p(N) = \frac{1}{8} + p(D) = \frac{1}{8} + 0,375 = 0,5 = \frac{1}{2}$.

5) R: "avoir plus d'un garçon ". $p(R) = p(\overline{N}) = 1 - p(N) = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$.



Exercice 11

On dispose de trois sacs de billes.

Le premier sac contient des billes rouges et vertes, et il y a trois fois plus de vertes que de rouge dans le 1^er^ sac.

Le 2^e^ sac contient des billes rouges, vertes et bleues en quantités égales.

Le 3^e^ sac ne contient que des boules rouges et bleues en quantités égales.

1*a)* On extrait au hasard une boule du premier sac. Déterminer la probabilité qu'elle soit rouge, et en déduire celle qu'elle soit verte.

1b) Même question si l'on extrait une boule au hasard du second sac.

1c) Même question si l'on extrait une boule au hasard du troisième sac.

2) Une expérience aléatoire consiste à tirer au hasard une bille dans un premier sac et à noter sa couleur, recommencer la même procédure dans le 2^e^ sac, puis dans le 3^e^ sac.

a) Effectuer un arbre permettant de visualiser toutes les issues possibles à l'issue de l'expérience aléatoire décrite plus haut.

b) Calculer la probabilité des événements suivants :

R: *"les trois billes tirées sont rouges "* ; A: *"aucune bille n'est rouge "*

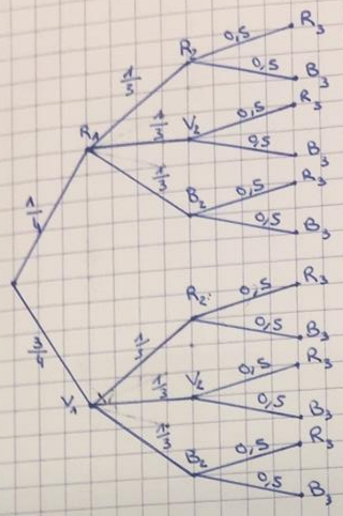
U: *"une bille exactement est rouge "* ; V: *"les trois billes tirées sont vertes "*.

1a) $P_1(R) = \frac{1}{4}$ donc $P_1(V) = \frac{3}{4}$.

1b) $P_2(V) = P_2(R) = P_2(B) = \frac{1}{3}$.

1c) $P_3(V) = 0$ et $P_3(R) = P_3(B) = \frac{1}{2}$.

2) a)



b) R = "Obtenir 3 billes rouges".

Rq : $R = R_1 \cap R_2 \cap R_3$

$p(R) = \frac{1}{4} \times \frac{1}{3} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{24}$.

V = "Obtenir 3 billes vertes".

V : événement impossible

Donc $p(V) = 0$

U = "Une seule bille rouge".

Sur l'arbre, 5 chemins réalisent l'événement U.

⚠ Il n'y a pas équiprobabilité pr chacun des chemins.

$p(U) = \frac{1}{4} \times \frac{1}{3} \times \frac{1}{2} + \frac{1}{4} \times \frac{1}{3} \times \frac{1}{2} + \frac{3}{4} \times \frac{1}{3} \times \frac{1}{2} + \frac{3}{4} \times \frac{1}{3} \times \frac{1}{2} + \frac{3}{4} \times \frac{1}{3} \times \frac{1}{2}$.

$p(U) = \frac{1}{4} \times \frac{1}{3} \times \frac{1}{2} \times 2 + \frac{1}{3} \times \frac{3}{4} \times \frac{1}{2} \times 3$

$p(U) = \frac{1}{12} + \frac{3}{8}$

$p(U) = \frac{2}{24} + \frac{9}{24}$

$p(U) = \frac{11}{24}$

A : "Aucune bille rouge". → 2 chemins favorables

$p(A) = \frac{3}{4} \times \frac{1}{3} \times \frac{1}{2} + \frac{3}{4} \times \frac{1}{3} \times \frac{1}{2}$

$p(A) = \frac{3}{4} \times \frac{1}{3} \times \underbrace{\frac{1}{2} \times 2}_{1}$

$p(A) = \frac{1}{4}$

Exercice 12

On considère un QCM qui comporte 5 questions. Pour chaque question, il y a 3 réponses proposées, et une seule est la bonne réponse. Un candidat répond au hasard à chacune des questions systématiquement.

Calculer, après avoir décrit l'univers des possibles, les probabilités des événements suivants :

A: " Faire tout juste " ; B: " Faire tout faux " ; C: " avoir au moins une bonne réponse "

q.1 q.2 q.3 q.4 q.5

Au total, on peut répondre de : $3 \times 3 \times 3 \times 3 \times 3 = 3^5 = 243$ façons différentes (ttes équiprobable

A : " Faire tt juste ".

$p(A) = \frac{1}{3} \times \frac{1}{3} \times \frac{1}{3} \times \frac{1}{3} \times \frac{1}{3} = \left(\frac{1}{3}\right)^5 = \frac{1^5}{3^5} = \frac{1}{243}$.

$p(A) \approx 0{,}004$ à 10^{-3} près

B : " Faire tt faux ". ⚠ B n'est <u>pas</u> l'évènement contraire de A !

$p(B) = \frac{2}{3} \times \frac{2}{3} \times \frac{2}{3} \times \frac{2}{3} \times \frac{2}{3} = \left(\frac{2}{3}\right)^5 = \frac{2^5}{3^5} = \frac{32}{243}$.

$p(B) \approx 0{,}13$ à 10^{-2} près.

C : " Avoir au − 1 bonne réponse ".

Rq : C est l'évènement contraire de B !

$C = \overline{B}$

Donc $p(C) = p(\overline{B}) = 1 - \frac{32}{243} = \frac{211}{243}$.

$p(C) \approx 0{,}87$ à 10^{-2} près.

Exercice 18

On lance simultanément deux dés cubiques équilibrés, et on s'intéresse à la distance entre les deux résultats obtenus (différence entre le plus grand et le plus petit de ces nombres).

a) Faire un tableau à double entrée contenant toutes les éventualités possibles.

b) Déterminer les probabilités des événements suivants :

A = *"Obtenir un écart impair".*

B = *"Obtenir 0 comme écart ".*

C = *" Obtenir au moins 4 comme écart".*

D = *" Obtenir au plus 2 comme écart".* max 2

c) Définir en français l'événement contraire de C, puis calculer la probabilité de cet événement.

d) Décrire en français l'événement $A \cap \bar{C}$, puis calculer sa probabilité.

e) Décrire en français l'événement $A \cup \bar{C}$, puis calculer sa probabilité.

a)

Dé 2 \ Dé 1	1	2	3	4	5	6
1	0	1	2	3	4	5
2	1	0	1	2	3	4
3	2	1	0	1	2	3
4	3	2	1	0	1	2
5	4	3*	2	1	0	1
6	5	4	3	2	1	0

$\times \; |5-2| = |3| = 3$

b) A = "Obtenir un écart impair".

Rq : Ici l'univers des possibles est :

$\Omega = \{0 ; 1 ; 2 ; 3 ; 4 ; 5\}$

⚠ Il n'y a pas équiprobabilité sur chacune des issues de Ω !

$p(A) = \frac{18}{36} = \frac{1}{2}$.

B : " Obtenir 0 c écart ".

$p(B) = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}$.

Exercice 13

On lance simultanément deux dés cubiques équilibrés, et on s'intéresse à la distance entre les deux résultats obtenus (différence entre le plus grand et le plus petit de ces nombres).

a) Faire un tableau à double entrée contenant toutes les éventualités possibles.

b) Déterminer les probabilités des événements suivants :

$A =$ *"Obtenir un écart impair".*

$B =$ *"Obtenir 0 comme écart ".*

$C =$ *" Obtenir au moins 4 comme écart".*

$D =$ *" Obtenir au plus 2 comme écart".* max 2

c) Définir en français l'événement contraire de C, puis calculer la probabilité de cet événement.

d) Décrire en français l'événement $A \cap \bar{C}$, puis calculer sa probabilité.

e) Décrire en français l'événement $A \cup \bar{C}$, puis calculer sa probabilité.

a)

Dé 1 / Dé 2	1	2	3	4	5	6
1	0	1	2	3	4	5
2	1	0	1	2	3	4
3	2	1	0	1	2	3
4	3	2	1	0	1	2
5	4	3*	2	1	0	1
6	5	4	3	2	1	0

$* \; |5-2| = |3| = 3$

b) A = "Obtenir un écart impair".

Rq : Ici l'univers des possibles est :

$\Omega = \{0 ; 1 ; 2 ; 3 ; 4 ; 5\}$

⚠ Il n'y a pas équiprobabilité sur chacune des issues de Ω !

$p(A) = \frac{18}{36} = \frac{1}{2}$.

B : " Obtenir 0 ĉ écart ".

$p(B) = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}$.

U : " Obtenir 1 ĉ écart "

$p(U) = \frac{10}{36} = \frac{5}{18}$

$C = \{4 ; 5\}$

$p(C) = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}$.

$D = \{0 ; 1 ; 2\}$

$p(D) = \frac{6+10+8}{36} = \frac{24}{36} = \frac{2}{3}$.

c) $\overline{C}$ = "Obtenir $\underbrace{\text{- de 4}}_{<4}$ ĉ écart" ou encore "Obtenir au + (au max) 3 ĉ écart".

$\overline{C} = \{0 ; 1 ; 2 ; 3\}$

$p(\overline{C}) = 1 - p(C) = 1 - \frac{1}{6} = \frac{6}{6} - \frac{1}{6} = \frac{5}{6}$

d) $A \cap \overline{C}$: "Obtenir un écart impair et au + égal à 3".

$A \cap \overline{C} = \{1 ; 3\}$, donc $p(A \cap \overline{C}) = \frac{10+6}{36} = \frac{16}{36} = \frac{4}{9}$.

e) $A \cup \overline{C}$: "Obtenir un écart impair ou au + égal à 3".

$A \cup \overline{C} = \{0 ; 1 ; 2 ; 3 ; 5\}$

$p(A \cup \overline{C}) = p(A) + p(\overline{C}) - p(A \cap \overline{C}) = \frac{1}{2} + \frac{5}{6} - \frac{4}{9} = \frac{9}{18} + \frac{15}{18} - \frac{8}{18} = \frac{16}{18} = \frac{8}{9}$.