

Chapitre VI

Continuité et théorème des valeurs intermédiaires

I – Continuité d’une fonction

A – Généralités sur la continuité

Soit f une fonction définie sur un intervalle I de \mathbb{R} , et a un réel appartenant à l’intérieur de I .

Définition : f est dite continue en a si et seulement si : $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$.

Ou encore, f est continue en a si et seulement si $\lim_{h \rightarrow 0} f(a + h) = f(a)$.

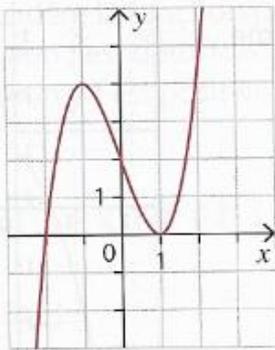
En français, f est continue en a si et seulement si f admet une limite finie en a égale à $f(a)$.

f est continue sur I signifie que f est continue en tout réel a appartenant à I .

Illustration graphique de la notion de continuité

• f est définie sur \mathbb{R} par :

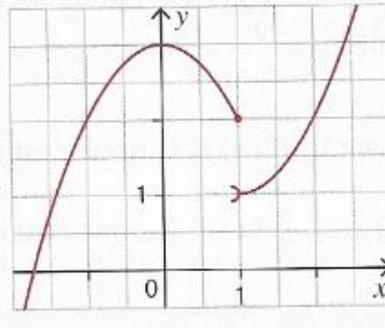
$$f(x) = x^3 - 3x + 2.$$



f est continue sur \mathbb{R} .

• f est définie sur \mathbb{R} par :

$$f(x) = \begin{cases} 3 - x^2 & \text{si } x \leq 1 \\ x^2 - 2x + 2 & \text{si } x > 1 \end{cases}$$



Montrons que f n'est pas continue en 1 :

Dans le second exemple, f n'est pas continue en 1, et donc f est non continue sur \mathbb{R} .

Concrètement, la continuité de f sur I se traduit par le fait que la courbe représentative de f peut être tracée.....

Remarque : le terme continuité n’a pas été choisi de façon anodine, il signifie qu’il n’y a pas de « coupure » dans le graphe de f .

Post bac, f est continue en a se quantifie en :

Exercice 1

La **fonction porte**, notée Π , est définie sur \mathbb{R} par :

$$\Pi(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < -\frac{1}{2} \text{ ou } x > \frac{1}{2} \\ 1 & \text{si } -\frac{1}{2} \leq x \leq \frac{1}{2} \end{cases}$$

- a) Dans un repère, tracer la courbe de la fonction Π .
- b) Sur quels intervalles, les plus grands possibles, la fonction Π est-elle continue ?

Propriété (admise)

- Les fonctions polynômes, la fonction exponentielle sont des fonctions continues sur \mathbb{R} .
- $x \rightarrow \sqrt{x}$ est continue sur $]0 ; +\infty[$; $x \rightarrow \frac{1}{x}$ est continue sur $] -\infty ; 0[$ et sur $]0 ; +\infty[$.
- Sur chaque intervalle où elle est définie, une fraction rationnelle (= quotient de deux polynômes) est continue.
- De façon générale, si f et g sont deux fonctions continues sur un intervalle I , et k est un réel, alors les fonctions $kf + g, fg, f^n$ (n entier naturel non nul) sont continues sur I ; $\frac{f}{g}$ est continue sur les intervalles où elle est définie.
- Si $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ est continue en $a \in I$ et si $g: J \rightarrow \mathbb{R}$ est continue en $f(a) \in J$, alors $g \circ f$ est continue en a .

De façon générale, la notion de continuité se transmet en faisant de l'algèbre sur des fonctions continues au départ.

Exemple

Soit f la fonction définie sur \mathbb{R} par : $f(x) = \begin{cases} x^2 + 1 & \text{si } x < 1 \\ x^2 + a & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$. Déterminer le réel a pour que la fonction f soit continue en 1.

✂-----

Théorème (être dérivable implique être continue)

Soit f une fonction définie sur un intervalle I de \mathbb{R} , et a un réel appartenant à l'intérieur de I .

1) Si f est dérivable en a , alors f est continue en a .

2) La réciproque est fautive !

Preuve : 1) Pour h non nul : $f(a+h) = f(a) + \frac{f(a+h) - f(a)}{h} h$ permet de conclure instantanément !

En effet :

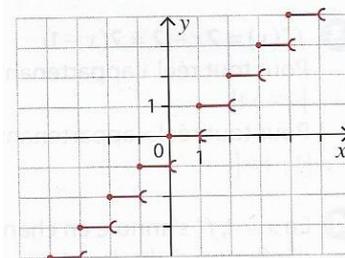
2) La fonction racine carrée est continue en 0 mais non dérivable en 0 !

Comme cette année on ne manipule presque exclusivement que des fonctions dérivables, ces fonctions à disposition sont donc continues !

Il existe cependant des fonctions non continues (on dit discontinues) en un réel a .

A titre culturel, donnons un exemple de fonction discontinue en plusieurs valeurs :

• f est définie sur \mathbb{R} par : $f(x) = E(x)$, où $E(x)$ désigne la partie entière de x , c'est-à-dire le plus grand entier inférieur ou égal à x .



Remarque : Dans un tableau de variations, une flèche sans coupure sur un intervalle indique la continuité de la fonction en question sur cet intervalle. Quel que soit n entier, f n'est pas continue en n , donc f n'est pas continue sur \mathbb{R} .

Complément : au chapitre 1, nous avons appris à dériver les fonctions composées.
Voici une preuve du théorème de dérivation des fonctions composées :

Soit u une fonction définie sur un intervalle I et f une fonction définie sur un intervalle J tel que pour tout réel x appartenant à I , on ait $u(x)$ qui appartienne à J .

Si u est dérivable sur l'intervalle I et f est dérivable sur J , alors la fonction $g = f \circ u$ est dérivable sur I , et pour tout réel x appartenant à I , on a :

$$\heartsuit \heartsuit \heartsuit g'(x) = (f \circ u)'(x) = u'(x) \times f'(u(x)). \heartsuit \heartsuit \heartsuit$$

Preuve: Soit un réel $a \in I$ et un réel $h > 0$ tel que $a + h$ soit dans I .
On calcule le taux d'accroissement de $f(u)$ entre a et $a + h$.

$$\frac{f(u(a+h)) - f(u(a))}{h} = \frac{u(a+h) - u(a)}{h} \times \frac{f(u(a+h)) - f(u(a))}{u(a+h) - u(a)}$$

Or, la fonction u est dérivable sur I donc $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{u(a+h) - u(a)}{h} = u'(a)$.

De plus :

— La fonction u est continue sur I donc en a et on a :

$$\lim_{h \rightarrow 0} u(a+h) = u(a) \iff \lim_{h \rightarrow 0} u(a+h) - u(a) = 0.$$

— La fonction f étant dérivable sur J , elle est dérivable en $u(a) \in J$:

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(u(a+h)) - f(u(a))}{u(a+h) - u(a)} \underset{H=u(a+h)-u(a)}{=} \lim_{H \rightarrow 0} \frac{f(u(a)+H) - f(u(a))}{H} = f'(u(a)).$$

— Enfin, la fonction u est dérivable en a donc :

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{u(a+h) - u(a)}{h} = u'(a).$$

En conclusion, d'après les théorèmes sur les limites de produits :

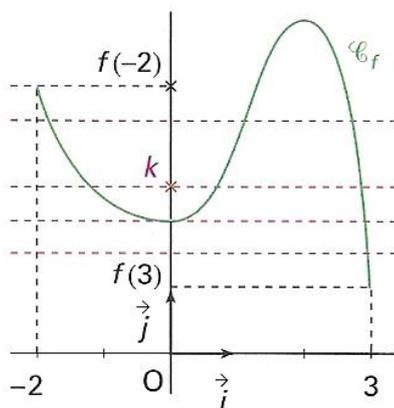
$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(u(a+h)) - f(u(a))}{h} = u'(a) \times f'(u(a)).$$

La fonction $f(u)$ est donc dérivable en $a \in I$ quelconque donc sur I tout entier. └

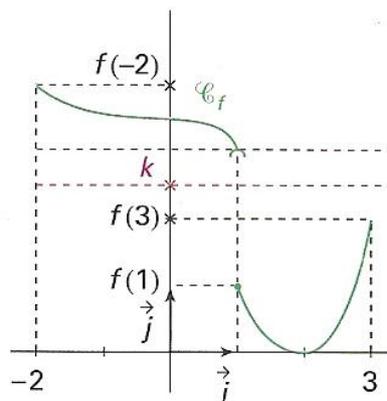
Remarque : cette preuve est erronée : il faut ici supposer que $u(a+h)-u(a)$ est non nul, ce qui peut être obtenu en supposant que u est une fonction strictement monotone par exemple.

II – Le théorème des valeurs intermédiaires et ses innombrables conséquences

Approche graphique :



f est continue sur $[-2 ; 3]$. Pour tout réel k compris entre $f(3)$ et $f(-2)$, l'équation $f(x) = k$ admet une ou plusieurs solutions.



f est définie sur $[-2 ; 3]$ mais elle n'est pas continue sur $[-2 ; 3]$. Il existe des réels k compris entre $f(3)$ et $f(-2)$ tels que l'équation $f(x) = k$ n'admet pas de solution.

♥♥♥ Théorème des valeurs intermédiaires (noté T.V.I.) ♥♥♥

Soit f une fonction définie sur un intervalle I de \mathbb{R} , et a et b deux réels appartenant à I avec $a < b$.

Si f est continue sur $[a ; b]$, alors, pour tout réel k compris entre les réels $f(a)$ et $f(b)$, il existe au moins un réel c compris entre a et b tel que $f(c) = k$.

Illustration

On admet ce théorème qui est assez intuitif, dont la preuve est moins aisée !

Mnémono : ♥♥♥ On retiendra que si f est définie et continue sur $[a ; b]$, alors f prend **AU MOINS** une fois toute valeur intermédiaire k comprise entre $f(a)$ et $f(b)$. ♥♥♥

Remarque : L'équation $f(x) = k$ où k est compris entre $f(a)$ et $f(b)$ admet au moins une solution sur l'intervalle $[a ; b]$. On ne sait pas lequel des deux réels $f(a)$ et $f(b)$ est le plus grand, donc lorsqu'on dit compris entre $f(a)$ et $f(b)$, ne pas croire que $f(a) < f(b)$!

Le T.V.I va donc permettre de « prévoir » l'existence de solution(s) pour une équation donnée, sur un intervalle.

Application 1

Soit f la fonction définie sur \mathbb{R} par $f(x) = x^3 + x + 1$. Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet au moins une solution sur $[-2 ; 2]$.

Remarques importantes

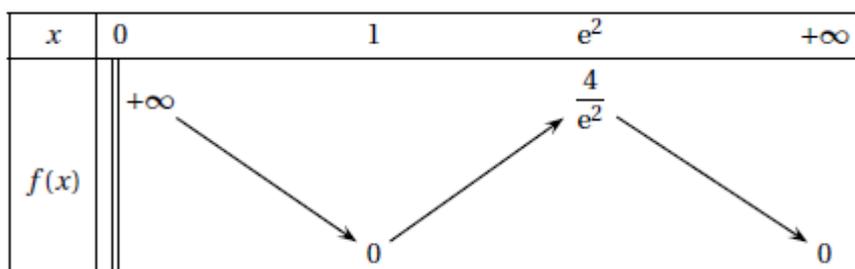
Trois conditions sont nécessaires pour pouvoir appliquer ce corollaire du T.V.I :

- 1)
 2)
 3)

Le corollaire du T.V.I. s'applique aussi sur un intervalle de la forme : $[a ; b[;]a ; b[;]a ; b[; [a ; +\infty[;]a ; +\infty[;]-\infty ; b[;]-\infty ; b]$.

Si l'intervalle est ouvert en une borne a ou b est ouverte, alors **on remplace l'image $f(a)$ ou $f(b)$ par la LIMITE de f en cette borne** ; si une borne de l'intervalle est $-\infty$ (ou $+\infty$), alors on considère la limite de f en $-\infty$ (ou en $+\infty$).

☛ Pour un intervalle, la borne écrite à gauche est toujours inférieure à celle écrite à droite : ainsi écrire 0 appartient à $[4 ; -2]$, ou encore 1 appartient à $] +\infty ; 0[$ sont des inexactitudes. ☛

Exercice graphique

Déterminer, en justifiant, le nombre de solutions de chacune des équations suivantes sur l'intervalle donné :

- a) $f(x) = 2$ sur $]0 ; 1]$.
 b) $f(x) = 0$ sur $]0 ; +\infty[$
 c) $f(x) = 0,5$ sur $[1 ; e^2]$ puis sur $]0 ; +\infty[$.
 d) $f(x) = -1$ sur $]0 ; +\infty[$

✂-----

Exercice 2

f est définie sur $[0 ; 2]$ par : $f(x) = -x^3 - x + 3$.

- a) Démontrer que f est strictement décroissante sur $[0 ; 2]$ et dresser son tableau de variation.
 b) En déduire que l'équation : $f(x) = 0$ admet une unique solution sur $[0 ; 2]$.

✂-----

Exercice 3

Soit f la fonction définie sur \mathbb{R} par : $f(x) = e^x + x - 2$.

- Démontrer que f est strictement croissante sur \mathbb{R} .
- Déterminer les limites de f en $+\infty$ et en $-\infty$ et dresser son tableau de variation.
- Démontrer que l'équation : $f(x) = 0$ admet une unique solution dans \mathbb{R} notée α .
- Encadrer α : à l'unité près, puis au dixième près, puis à 10^{-2} près à l'aide de votre calculatrice. (Méthode des balayages successifs).
- Etudier le signe de $f(x)$ sur \mathbb{R} .

Bien retenir cette façon de faire pour déterminer le signe des valeurs prises par une fonction sur un intervalle.

✂-----

Exercice 4

f est la fonction définie sur $[-10 ; +\infty[$ par : $f(x) = (x+1)e^x - 3$.

En détaillant les étapes de votre démarche, étudier le signe de $f(x)$ suivant les valeurs de x .

✂-----

Remarques : *T.V.I* et son corollaire **permettent de montrer l'existence et/ou l'unicité de(s) solution(s) à une équation donnée**, sur un intervalle donné, mais néanmoins, ces gros théorèmes **ne permettent pas de savoir combien vaut chaque solution (valeur exacte)**.

On se contentera, dans les exercices, de donner une valeur approchée de chaque solution, avec la précision que l'on nous demandera. L'utilisation d'une calculatrice sera nécessaire.

III- Continuité et suite récurrentes**Propriété (admise)**

Soit f une fonction continue sur un intervalle I , et a un réel appartenant à I .

Soit (u_n) une suite telle que pour tout entier naturel n , $u_n \in I$.

- Si (u_n) converge vers a , alors la suite $(f(u_n))$ converge vers $f(a)$.
- Soit (u_n) une suite telle que pour tout entier naturel n , $u_{n+1} = f(u_n)$, où f est continue sur I .

Si (u_n) converge vers $L \in I$, alors L est solution de l'équation :

Schéma : ♥♥♥ $\lim_{n \rightarrow +\infty} f(u_n) = f(\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n)$ dès que f est continue en a où $a = \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$.♥♥♥

Exercice 5

Soit (u_n) la suite définie par : $u_0 = -5$ et pour tout entier naturel n , $u_{n+1} = \sqrt{\frac{1}{2}u_n + 3}$.

- Soit f la fonction définie sur $[0 ; 2]$ par : $f(x) = \sqrt{\frac{1}{2}x + 3}$.

Etudier le sens de variation de f sur $[0 ; 2]$ et dresser son tableau de variation.

- Démontrer que pour tout entier naturel $n \geq 1$, on a : $0 \leq u_n \leq u_{n+1} \leq 2$.

- En déduire que (u_n) converge, puis calculer sa limite.

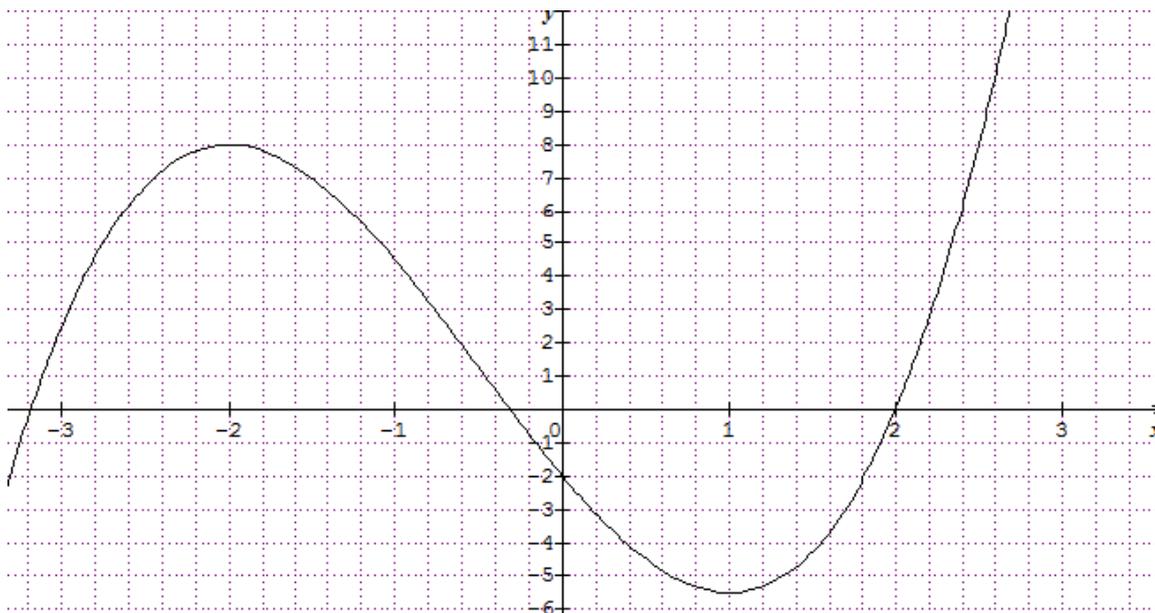
Exercices de synthèse**Exercice I**

Soit f la fonction définie sur \mathbb{R} par : $f(x) = x^3 + 1,5x^2 - 6x - 2$.

On note C_f la courbe représentative de f dans un repère orthogonal $(O ; I ; J)$.

Le but de l'exercice est de chercher s'il existe des tangentes à C_f passant par le point O .

0) Conjecturer graphiquement si le problème posé admet des solutions, le cas échéant, préciser combien.



1) Soit a un nombre réel. Démontrer que la tangente T_a à C_f au point d'abscisse a de C_f passe par l'origine du repère si et seulement si : $f(a) - af'(a) = 0$.

2) Soit g la fonction définie sur \mathbb{R} par : $g(x) = f(x) - xf'(x)$.

a) Exprimer $g(x)$ en fonction de x .

b) Déterminer les limites de g en $+\infty$ et $-\infty$.

c) Etudier le sens de variation de g sur \mathbb{R} , et dresser son tableau de variation complet.

d) Démontrer que la fonction g s'annule une fois et une seule sur \mathbb{R} . On note α cette valeur.

e) Donner un encadrement de α à 10^{-2} près, puis la valeur approchée de α au dixième près.

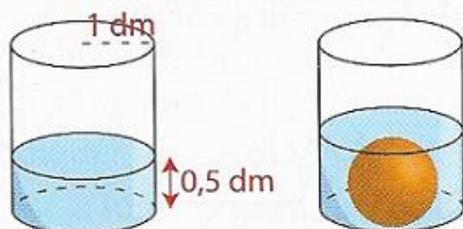
f) Déterminer le signe de la fonction g sur \mathbb{R} .

3) Résoudre alors le problème posé en début d'énoncé.

Exercice II

Un vase cylindrique de base un disque de rayon 1 dm, contient de l'eau sur une hauteur de 0,5 dm.

On plonge une bille de diamètre d dm dans ce cylindre et on constate que le niveau de l'eau est tangent à la bille.



1. a) Exprimer en fonction de d le volume, en dm^3 :
 - d'eau versé initialement,
 - de la bille.
- b) Exprimer de deux façons différentes le volume du cylindre de hauteur d contenu dans le vase après avoir plongé la bille.
- c) En déduire que d vérifie $0 < d < 2$ et :

$$d^3 - 6d + 3 = 0.$$
2. a) Démontrer que l'équation $x^3 - 6x + 3 = 0$ admet une unique solution dans l'intervalle $]0 ; 2[$.
- b) À l'aide de la calculatrice, donner un encadrement d'amplitude 10^{-2} du diamètre d de la bille.

Exercice III (métropole 2022)

g est la fonction définie sur $[0 ; +\infty[$ par : $g(x) = (-0,15x + 2,2)e^{0,2x} - 2,2$.

- a. Déterminer la limite de g en $+\infty$.
- b. Démontrer que, pour tout réel x appartenant à $[0 ; +\infty[$ on a : $g'(x) = (-0,03x + 0,29)e^{0,2x}$.
- c. Étudier les variations de la fonction g et dresser son tableau de variations sur $[0 ; +\infty[$.
Préciser une valeur approchée à 10^{-2} près du maximum de g .
- d. Montrer que l'équation $g(x) = 0$ admet une unique solution non nulle et déterminer, à 10^{-2} près, une valeur approchée de cette solution.

IV – Algorithme de dichotomie

Méthode d'encadrement d'une solution à l'aide d'un algorithme de dichotomie

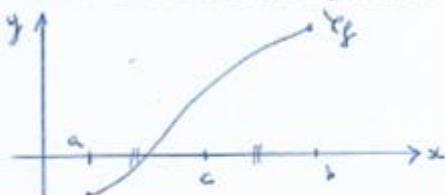
On considère une fonction f continue et strictement monotone sur $[a ; b]$, avec $a \leq b$.

On suppose également que l'équation : $f(x) = 0$ admet une unique solution sur $[a ; b]$ que l'on ne sait pas déterminer explicitement par le calcul ! On note α cette solution.

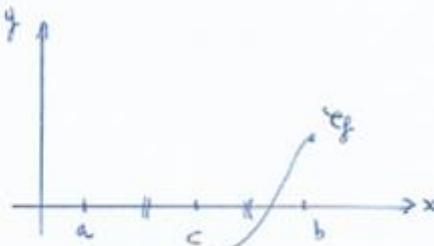
Le principe de dichotomie (en grec signifie couper en deux) consiste à déterminer successivement l'intervalle dans lequel se situe α , en divisant par 2 l'amplitude de l'intervalle à chaque itération.

Pour ce faire, on détermine le centre c de chacun des intervalles, et on teste si α est située dans $[a ; c]$ ou $[c ; b]$:

Les dessins ci-dessous sont importants :



Si la solution est dans $[a ; c]$, on recommence ce procédé appliqué à $[a ; c]$.



Si la solution est située dans $[c ; b]$, on recommence ce procédé appliqué à $[c ; b]$.

D'après le corollaire du T.V.I :

Si $f(a) \times f(c) < 0$, alors α appartient à $]a ; c[$.

Si $f(a) \times f(c) > 0$, alors α appartient à $]c ; b[$.

En itérant cette procédure, on arrive rapidement à encadrer α à la précision voulue.

Algorithme de Dichotomie :

Demander à l'utilisateur a , b et ϵ (ϵ désigne l'amplitude de l'encadrement souhaité)
 $\epsilon > 0$.

Tant que $b - a \geq \epsilon$

Affecter à c la valeur $\frac{a+b}{2}$.

Si $f(a) \times f(c) < 0$

Alors

Affecter à b la valeur c

Sinon

Affecter à a la valeur c .

Fin de Si.

Fin de Tant que

Sortie : Afficher a et b .

Application

On considère l'équation : $x^3 + 5x + 7 = 0$.

On admet que cette équation a une unique solution sur $[-2 ; -1]$ car la fonction f définie sur $[-2 ; -1]$ par : $f(x) = x^3 + 5x + 7$ est continue, strictement croissante sur $[-2 ; -1]$ et que $0 \in [f(-2) ; f(-1)]$ vu que $f(-2) = -11$ et $f(-1) = 1$.

Avec Python : avoir une valeur approchée à 10^{-n} près de l'unique solution α de l'équation $f(x)=0$: l'entier naturel n est choisi par l'utilisateur).

```
def f(x):
    y=x**3+5*x+7
    return y

def Dichotomie(n):
    a=-2
    b=-1
    while b-a>10**(-n):
        m=(a+b)/2
        if f(a)*f(m)<0:
            b=m
        else:
            a=m
    return m
```

Utiliser ce programme, puis déterminer une valeur approchée de α à 10^{-2} près ; 10^{-4} près.

Attention, avant de modifier ce programme et l'appliquer à une autre fonction f , il faudra toujours commencer par prouver que f est continue sur $[a ; b]$, strictement monotone sur $[a ; b]$ et telle que l'équation : $f(x) = 0$ admet une seule solution sur $[a ; b]$!

On peut facilement adapter ce programme pour encadrer l'unique solution sur un intervalle donné d'une équation de la forme : $f(x) = k$ où k est un réel.