*« En mathématiques, nous sommes davantage des serviteurs que des maîtres. » Charles Hermite*

# Chapitre XIII Dénombrement et combinatoire

## I – Généralités et vocabulaire

*Définition*

Intuitivement, un ensemble désigne une famille "d'objets" distincts appelés les éléments de l'ensemble.

Un ensemble peut être formé de nombres, de lettres, de fruits, d'êtres humains…….

Soit $n$ est un entier naturel, et E un ensemble composé de $n$ éléments.

On dit que E est un ensemble fini, et le nombre d'éléments de E est appelé le cardinal de E, et noté $card(E)$ ou encore parfois, $\#(\text{E})$ ou même $|E|$. Ici, $card(E) = n$.

Lorsqu'on énumère les éléments d'un ensemble, on commence par mettre une accolade, puis les différents éléments de l'ensemble, séparés à chaque fois par un point-virgule, et enfin on referme l'accolade.

***Dénombrer*** signifie ***compter le nombre d'éléments*** d'un ensemble.

*Exemples*

$E = \{a\ ;\ b\ ;\ m\ ;\ p\}$ est un ensemble fini de cardinal égal à ….. : $card(E) =$ ….

L'élément $m$ appartient à l'ensemble $E$, ce qui se note : ……….

Par-contre, l'élément $z$ n'appartient pas à l'ensemble $E$, ce qui se note : ………

$F = \{-1\ ;\ 2{,}5\ ;\ 6\ ;\ \pi\ ;\ \frac{1}{9}\}$ est un ensemble fini de cardinal égal à ….. : $card(F) =$ …..

*Remarques* : Il existe des ensembles qui ne sont pas finis, comme $\mathbb{N}$, $\mathbb{R}$ par exemple.

L'ensemble qui ne contient aucun élément s'appelle l'ensemble vide et se note : $\varnothing$.

***L'ordre des éléments dans un ensemble n'intervient pas*** : $\{a\ ;\ b\ ;\ c\} = \{b\ ;\ a\ ;\ c\}$

$\{1\ ;\ 2\} = \{2\ ;\ 1\}$.

Deux ***ensembles sont égaux*** lorsqu'ils contiennent ***exactement les mêmes éléments***.

Il n'y a *pas de répétitions d'éléments* au sein d'un ensemble : par exemple, on n'écrira pas : $\cancel{\{a\ ;\ a\}}$ mais $\{a\}$ !

*Définition*

Deux ensembles sont ***disjoints*** lorsqu'ils n'ont ***aucun élément en commun***, c'est-à-dire que ***leur intersection est vide***.

Pour dire que des ensembles $A$ et $B$ sont disjoints on notera : $A \cap B = \varnothing$ : on lira : A *inter* B est vide. ($\cap$ est le symbole désignant l'intersection).

Par exemple, $A = \{1\ ;\ 2\ ;\ 3\}$ ; $B = \{6\ ;\ 17\}$ : A et B sont disjoints.

***Définitions***

Soit $E$ un ensemble.

On appelle partie de $E$ (ou encore sous-ensemble de $E$), tout ensemble $F$ dont chacun des éléments appartiennent aussi à $E$.

On dit que $F$ est inclus (ou contenu) dans $E$ et on note cela : $F$….. $E$.

***Exemple***

$E = \{a\ ;e\ ;i\ ;o\ ;u\ ;y\}$ et $F = \{e\ ;u\}$ : on a $F \subset E$. De même, $\{0\ ;1\} \subset \{0\ ;\ 1\ ;\ 5\}$.

Rappelons enfin que :

- L'intersection de deux ensembles $A$ et $B$, notée $A \cap B$, (lire $A$ inter $B$) est l'ensemble des éléments appartenant simultanément à $A$ et à $B$.

- La réunion de deux ensembles $A$ et $B$, notée $A \cup B$ (lire $A$ union $B$) est l'ensemble dont les éléments appartiennent à au moins un des deux ensembles $A$ ou $B$.

- Si $E$ est un ensemble et $A$ un sous-ensemble de $E$, le complémentaire de $A$ dans $E$, noté $\bar{A}$ , est l'ensemble formé par tous les éléments de $E$ qui n'appartiennent pas à $A$.

  $\bar{A} = \{\boldsymbol{x} \in E\ /\ \boldsymbol{x} \notin A\}$.

***Illustration*** :

***Exemple***

*i)* Si $A = \{e\ ;f\ ;g\ ;h\}$ et $B = \{f\ ;t\ ;u\}$, alors : $A \cap B =$ ……  et $A \cup B =$ ………..

*ii)* Si $E = \{0\ ;\ 1\ ;\ 2\ ;\ 3\ ;\ 8\ ;\ 11\}$ et $A = \{2\ ;\ 3\ ;\ 11\}$, déterminer $\bar{A}$.

***Remarque***

***Attention, lorsqu'on a deux sous-ensembles A et B d'un ensemble E, il est fréquent que A ne soit pas inclus dans B et que B ne soit pas inclus dans A.***

***Illustration*** :

***Définitions***

Soit $E$ un ensemble.

Une ***partie de E*** constituée ***d'un seul élément*** est appelée un ***singleton***.

Par exemple, si $E = \{$chien ; chat ; poisson$\}$, $F = \{$chien$\}$ est un singleton.

Si $E = \{-8\ ;\ 5\ ;\ 3\}$, $F = \{5\}$ est un singleton.

Quel est le nombre de singletons d'un ensemble $E$ ayant pour cardinal $n$ ?

Si $E$ contient au moins deux éléments, on appelle ***paire*** toute ***partie de E constituée d'exactement deux éléments.***

Par exemple, {2 ; 3} ; {chien ; chat} ; {trèfle ; cœur} sont des exemples de paires.

L'***ensemble*** dont ***les éléments*** sont ***les différentes parties de E*** est noté $\mathcal{P}(E)$ et appelé ensemble des parties de $E$.

*Exemples*

Déterminer l'ensemble des parties de l'ensemble $E$ dans chacun des cas suivants, et préciser le cardinal de $\mathcal{P}(E)$ dans chacun des cas suivants :

*i*) $E = \{1\}$

*ii*) $E = \{1 ; 2\}$

*iii*) $E = \{a ; b ; c\}$

*iv*) $E = \{a ; b ; c ; d\}$.

✂-----------------------------------------------------------------------------------

*Remarques* : si $E = \varnothing$, alors $\mathcal{P}(E)$ = …… : en particulier, $card\,(\mathcal{P}(E))$ =

Quelle conjecture légitime peut-on émettre sur le cardinal de $\mathcal{P}(E)$, lorsque $E$ est un ensemble de cardinal $n$ ?

*Définition*

Soit $E$ un ensemble non vide, et $k$ un entier naturel supérieur ou égal à 1.

On appelle ***k-liste*** de $E$ (***k****-liste* est une abréviation de liste de longueur $k$), ou encore ***k-uplet*** de $E$, une ***liste ordonnée*** formée de ***k*** éléments (non nécessairement distincts) de $E$.

Les éléments d'une telle liste ordonnée sont appelés coordonnées, ou encore composantes.

On note avec des ***parenthèses*** un ***k-uplet***, chacun de ses éléments étant séparés du suivant par une virgule ou un point-virgule.

*Exemples*

Si $E = \{0 ; 1\}$, alors :

(0 ; 1 ; 0 ; 0) est une 4-liste (ou 4-uplet) de $E$, (0 ; 0 ; 0 ; 1) est un autre 4-uplet (***attention l'ordre des éléments est fondamental dans une k-liste***).

(0 ; 1) est une 2-liste de $E$ et (1 ; 0) est une autre 2-liste de $E$.

(0 ; 0 ; 0) est une 3-liste de $E$, (1 ; 0 ; 0) est un autre 3-uplet de $E$.

Citer un octet de $E$, c'est-à-dire une 8-liste d'éléments de $E$ : ………………………………………..

Concrètement, un code de carte bleue est une 4-liste de l'ensemble des chiffres.

***Remarque*** : dans un ***k-uplet***, il peut donc y avoir ***répétition*** d'un ou plusieurs éléments, et l'***ordre*** des éléments est ***fondamental***.

*Définition*

Une ***2-liste*** est appelé un ***couple***.

Attention, l'ordre des éléments dans un couple est fondamental : $(a\ ;\ b) \neq (b\ ;\ a)$ : penser aux coordonnées d'un point dans le plan !

Les composantes d'un couple peuvent être identiques ! C'est le cas du couple $(0\ ;\ 0)$ !

Une ***3-liste*** est appelé un ***triplet*** : par exemple, en géométrie dans l'espace, on a vu qu'un point peut être repéré à l'aide d'un triplet de nombres réels.

$(6\ ;\ 2{,}5\ ;\ 3)$ est un exemple de triplet de réels.

*Définition*

Soit $E$ et $F$ deux ensembles non vides (non nécessairement finis).

Le produit cartésien des ensemble $E$ et $F$, que l'on note $E \times F$ (lire $E$ croix $F$) est l'ensemble formé par tous les couples $(x\ ;\ y)$ tels que $x \in E$ et $y \in F$.

$E \times F = \{(x\ ;\ y)\ /\ x \in E,\ y \in F\}$. (Le slash / signifie tel que lorsqu'il est écrit dans un ensemble).

Le symbole $\times$ (croix) ne doit pas être confondu avec celui de la multiplication !!

*Exemples*

1) $E = \{a\ ;\ b\ ;\ c\}$ et $F = \{b\ ;\ e\}$.

Déterminer le produit cartésien : $E \times F$

2) Ici, $E = \{3\ ;\ 2\ ;\ 1\}$ et $F = \{0\ ;\ 1\}$. Déterminer les produits cartésiens $E \times F$, puis $F \times E$.

A-t-on $E \times F = F \times E$ ?

On retiendra donc que le produit cartésien d'ensembles ………………………………………………………

Si $E = F$, on a : $E \times F = E \times E$ qui est noté $E^2$.

Par exemple, $\mathbb{R}^2$ désigne l'ensemble formé par tous les couples de réels (géométriquement $\mathbb{R}^2$ est l'ensemble des points du plan !). $\mathbb{R}^2 = \{(x\ ;\ y)\ /\ x \in \mathbb{R},\ y \in \mathbb{R}\}$.

*Remarques* : on peut étendre la définition du produit cartésien à plus de deux ensembles :

Si $E$, $F$, $G$ désignent trois ensembles, le produit cartésien $E \times F \times G$ (lire $E$ croix $F$ croix $G$) est l'ensemble des triplets de la forme $(x ; y ; z)$ où $x \in E$, $y \in F$ et $z \in G$.

Si $E = F = G$, alors $E \times F \times G = E \times E \times E = E^3$.

Par exemple, $\mathbb{R}^3$ est l'ensemble formé par tous les triplets de réels (géométriquement, $\mathbb{R}^3$ est l'ensemble des points de l'espace).

***Plus généralement*** : (définition du produit cartésien de $k$ ensembles) :

Si $k$ désigne un entier naturel supérieur ou égal à 2, et $E_1$ , $E_2$ , .....$E_k$ sont des ensembles non vides, on appelle produit cartésien des ensembles $E_1$ , $E_2$ , .....$E_k$ , l'ensemble noté $E_1 \times E_2 \times \ldots \times E_k$ , dont les éléments sont les *k-uplets* de la forme $(a_1 ; a_2 ; \ldots ; a_k)$ où $a_1 \in E_1$ , $a_2 \in E_2$ , ...., $a_k \in E_k$.

$E_1 \times E_2 \times \ldots \times E_k = \{(a_1 ; a_2 ; \ldots ; a_k) / a_1 \in E_1 , a_2 \in E_2 , \ldots, a_k \in E_k\}$.

## ***II- Principes simples de dénombrement***

### ***A-Le principe additif***

$n$ et $p$ sont deux entiers naturels.

Soit $E$ et $F$ deux ensembles finis et ***disjoints*** tels que : $card(E) = n$ et $card(F) = p$.

Le nombre d'éléments de l'ensemble $E \cup F$ est égal à ……….

On a donc, ***lorsque E et F sont disjoints*** : $card(E \cup F)$ = ………………………..

*En pratique, si vous avez deux sacs de billes, une façon de compter le nombre total de billes que vous possédez est de compter le nombre de billes de chaque sac, puis d'additionner ces deux cardinaux.*

*Exemple*

Si E $= \{a ; b ; c\}$ et F $= \{y ; z\}$, alors, comme E et F sont disjoints, on a : $card(E \cup F) =$

En particulier, si A est un sous-ensemble d'un ensemble fini $E$, on a : $card(\bar{A})$ = ………………………..

*Illustration et justification* :

De même le principe additif s'étend à plus de deux ensembles :

Soit $p$ un entier naturel supérieur ou égal à 2.

Si $E_1$, $E_2$, ……, $E_p$ sont $p$ ensembles finis et ***deux à deux disjoints***, alors :

$card(E_1 \cup E_2 \cup \ldots \cup \mathbf{E_p})$ = …………………………………………… =

Rigoureusement on note : $card(\bigcup_{i=1}^{p} E_i) =$

***Revenons au cas général*** de deux ensembles finis $E$ *et* $F$, ***non nécessairement disjoints*** :

On a : $\boldsymbol{card(E \cup F)}$ = ......................................................

*Illustration et preuve* :

***Exemple***

1) Dans un club de sport de 90 adhérents, 35 pratiquent le tennis, 24 pratiquent le football et 8 pratiquent chacun de ces deux sports.

$a$) Déterminer le nombre d'adhérents pratiquant au moins un des deux sports (parmi tennis et football).

$b$) En déduire le nombre d'adhérents du club ne pratiquant ni tennis ni football.

$c$) Déterminer le nombre d'adhérents du club pratiquant un seul des deux sports parmi tennis et football.

✂-----------------------------------------------------------------------------------

## B - Le principe multiplicatif

***Principe multiplicatif***

$n$ et $p$ désignent deux entiers naturels non nuls.

Soient $E$ et $F$ deux ensembles finis et non vides tels que $card(E) = n$ et $card(F) = p$.

Alors le produit cartésien $E \times F$ est un ensemble fini et on a : $card(E \times F) = \ldots\ldots\ldots$

En effet, $card(E \times F)$ peut être vu comme le nombre de cases à remplir à l'aide de couples, dans un tableau à double entrée contenant, par exemple, en ligne les éléments de $E$ et en colonne ceux de $F$.

*Exemple*

Si $E = \{a\ ;\ b\ ;\ c\}$ et $F = \{1\ ;\ 2\}$ : $card\ (E \times F) = \ldots$

| **E** \ **F** | 1 | 2 |
|---|---|---|
| $a$ | $(a\ ;1)$ | $(a\ ;2)$ |
| $b$ | $(b\ ;1)$ | $(b\ ;2)$ |
| $c$ | $(c\ ;1)$ | $(c\ ;2)$ |

$E \times F$ est l'ensemble formé par les six couples écrits dans ce tableau !

On aurait aussi pu schématiser le produit cartésien par un arbre également :

*Remarque* : le principe multiplicatif se généralise au produit cartésien de plusieurs ensembles :

Si $E_1$ , $E_2$ , …..$E_k$ sont des ensembles finis non vides :

$card(E_1 \times E_2 \times \ldots\ldots \times E_k) = card(E_1) \times card(E_2) \times \ldots\ldots \times card(E_k)$.

***Exemples***

1) A la cantine un repas simple est constitué d'une entrée et d'un plat.

La cantine propose trois entrées et deux plats. Déterminer le nombre de repas simples différents que vous pouvez constituer.

2) Un repas complet est composé d'une entrée, un plat et un dessert.

Vous avez le choix entre trois entrées, deux plats, et 4 desserts. Dénombrer combien de repas complets différents on peut constituer.

✂------------------------------------------------------------------------------------------

***Propriété***

**Soit $E$ un ensemble fini non vide de cardinal $n$, et $k$ un entier naturel non nul.**

**Le nombre de $k$-listes (ou *$k$-uplets*) de $E$ est égal à ………, c'est le cardinal du produit cartésien $E^k$.**

*Preuve : Par récurrence sur k !*

***Exercice* 1**

*a*) Combien de mots de trois lettres (ayant un sens ou non) peut-on former à partir de l'alphabet usuel formé de 26 lettres ?

*b*) On dispose de 3 tiroirs dans une commode, et on veut y ranger 5 caleçons. Dénombrer combien de rangements on peut faire de ces 5 caleçons.

*c*) Un code d'immeuble est constitué de 4 chiffres suivis d'une une lettre prise parmi les lettres A,B et C.

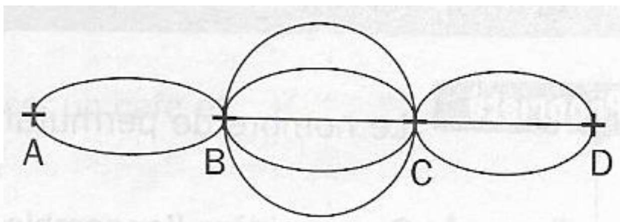
Déterminer le nombres de codes qui contiennent au moins un zéro.

*d*) Un QCM est constitué de 6 questions. Pour chaque question, quatre réponses sont proposées, et une seule est exacte.

*e*) Dénombrer de combien de façons différentes on peut répondre à ce *QCM*, en cochant systématiquement une réponse par question.

*f*) De combien de façons différentes peut-on répondre à ce *QCM* si on s'autorise de ne pas répondre à une question lorsqu'on n'est pas sûr de soi ?

*g*) On considère le diagramme ci-contre.




Combien d'itinéraires différents conduisent de A à D (sans passer deux fois par un même point) ?

*h*) Combien y-a-t-il de couples (respectivement de triplets) dans un ensemble à $n$ éléments ($n \geq 3$).

*i*) $n$ étant un entier naturel, combien y-a-t-il de $n$−uplets de l'ensemble $\{0 \ ; \ 1\}$ ?

✂------------------------------------------------------------------------

***Théorème* (nombre de parties d'un ensemble fini).**

Soit $n$ un entier naturel.

Un ensemble fini $E$ de cardinal $n$ possède ….. parties distinctes, c'est-à-dire : $card(\mathscr{P}(E)) = $ …..

***Preuve*** : Nous donnerons en fin de chapitre une preuve des plus naturelles de ce résultat.

En attendant, voici, à titre culturel, une démonstration par récurrence de ce résultat :

Par récurrence sur $n$ :

Notons, pour tout entier naturel $n$, $\mathcal{Q}(n)$ la propriété suivante : " un ensemble à $n$ éléments admet $2^n$ parties distinctes".

***Initialisation*** : pour $n = 0$, si $card(E) = 0$, alors $E = \varnothing$, donc $\mathscr{P}(\text{E}) = \{\varnothing\}$, donc $card(\mathscr{P}(E)) = 1$.

Or $2^0 = 1$, donc $card(\mathscr{P}(\text{E})) = 2^0$, et par suite, $\mathcal{Q}(0)$ est vraie.

***Hérédité*** : Soit $E$ un ensemble à $n$ éléments. On suppose que $\mathcal{Q}(n)$ est vraie, c'est-à-dire qu'un ensemble $E$ à $n$ éléments possède exactement $2^n$ parties distinctes.

Soit $E'$ un ensemble à $n+1$ éléments. Montrons que $card(\mathscr{P}(E')) = 2^{n+1}$.

Listons $E'$ : $E' = \{x_1, x_2, \ldots\ldots\ldots, x_n, x_{n+1}\} = \{x_1 \ ; x_2 \ ; \ldots\ldots ; x_n\} \cup \{x_{n+1}\} = E \cup \{x_{n+1}\}$ où $E = \{x_1, x_2, \ldots\ldots\ldots, x_n\}$ est un ensemble de cardinal $n$.

Les parties de $E'$ sont de deux sortes : celles qui contient l'élément $x_{n+1}$ et celles qui ne contiennent pas cet élément.

- Les parties de $E'$ contenant l'élément $x_{n+1}$ sont au nombre de :
- Les parties de $E'$ ne contenant pas l'élément $x_{n+1}$ sont au nombre de :

Notons $F$ (respectivement $G$) l'ensemble des parties de $E'$ correspondant au premier tiret (respectivement, second tiret) : $F$ et $G$ sont disjoints car une partie ne peut pas contenir l'élément $x_{n+1}$ et ne pas contenir cet élément !

De plus, $F \cup G = E'$, *donc*, d'après le principe additif, on a donc : ………

***Exemple***

Dans un ensemble à 8 éléments combien y-a-t-il de parties distinctes au total ?

## *C- Arrangements et permutations*

### *1) La notion de factorielle*

Soit $n$ un entier naturel supérieur ou égal à 1.

On appelle factorielle $n$ (ou encore $n$ factorielle), le nombre noté $n!$ , qui est égal au produit de tous les nombres entiers de 1 à $n$.

Ainsi : ♥♥ $\boxed{n! = 1\times 2\times \ldots\ldots \times n}$ ♥♥

Par exemple : $1! = 1$ $\quad 2! = 1\times2 = 2$ $\quad 3! = 1\times2\times3 = 6$ $\quad 4! = 1\times2\times3\times4 = 24$.

Combien vaut $5!$ ?

A l'aide de la calculatrice, trouver la valeur de $11!$ (taper : $\boxed{math}$ puis dans $\boxed{PROB}$ se trouve le symbole ! de la factorielle).

Attention, les valeurs prises par $n!$ augmentent très vite avec $n$, votre calculatrice n'arrive plus à afficher une valeur approchée de $n!$ dès que $n \geq 70$.

On convient que : $0\,! = 1$.

Pour tout entier naturel $n$, on a : ♥♥ $\boxed{(n+1)! = \ldots\ldots\times\ldots\ldots\ldots}$ ♥♥ (relation fondamentale)

Pourquoi la relation précédente au fait ?

***Exercice 2***

1) Simplifier au mieux les écritures suivantes :

$A = \dfrac{10!}{7!}$ $\quad B = \dfrac{3!}{6!}$ $\quad C = \dfrac{7!-5!}{4!}$

$D = \dfrac{1}{n!} - \dfrac{1}{(n+1)!}$ où $n$ est entier naturel. $\quad E = \dfrac{n!}{(n-2)!}$ où $n$ est un entier supérieur à 2.

2) Ecrire à l'aide d'un produit ou quotient de factorielles uniquement, chacune des expressions suivantes :

$A = 5\times6\times7\times8\times9\times10$ $\quad B = n(n+1)(n+2)$ $\quad C = n(n-1)(n-2)\ldots(n-k+1)$, où $2 \leq k \leq n$.

✂-----------------------------------------------------------------------------------

***Exercice 3***

On considère l'algorithme ci-contre, où $n$ est un entier naturel non nul.

```
f ← 1
Pour i allant de 1 à n
  | f ← f * i
Fin Pour
```

**1.** Déterminer ce que contient la variable $f$ en fin d'algorithme pour $n = 4$.

**2.** Quel est le rôle de cet algorithme ?

3) Compléter le programme en Python ci-dessous afin que la fonction factorielle retourne en sortie le nombre $n!$ , où $n$ est un entier non nul quelconque) :

```python
def factorielle(n):
    P=1
    for i in range(...,...):
        P=...
    return(...)
```

***2) Définition* (arrangement)**

Soient $k$ et $n$ des entiers naturels tels que : $1 \leq k \leq n$, et $E$ un ensemble à $n$ éléments.

On appelle ***k-arrangement*** de $E$ (qui est une abréviation d'arrangement de $k$ éléments de $E$) ou encore ***k-uplet d'éléments deux à deux distincts de E***, tout $k$-uplet de $E$ formé d'éléments de $E$ ***deux à deux distincts*** (c'est-à-dire ***tous différents, aucune répétition d'élément***).

*Exemple*

Si $E = \{1 \; ; \; 2 \; ; \; 3 \; ; \; 4\}$, alors $(2 \; ; \; 4 \; ; \; 1)$ est un 3-arrangement de $E$.

$(1 \; ; \; 2 \; ; \; 4)$ est un autre 3-arrangement de $E$ différent du précédent.

Comme pour les $k$-listes, ***l'ordre des éléments est fondamental dans un k-arrangement.***

***Propriété***

Soient $k$ et $n$ des entiers naturels tels que : $1 \leq k \leq n$, et $E$ un ensemble à $n$ éléments.

Le nombre de ***k-arrangements*** de $E$ est égal à : ........................................... (produit de $k$ facteurs).

En utilisant des factorielles, on a : $n(n-1)\ldots..(n-k+1) \; = \;$ ............

*Preuve* :

Ecrire un *k-uplet* d'éléments de $E$ deux à deux distincts revient à choisir d'abord dans $E$ un premier élément : $n$ choix sont possibles.

Ce choix étant fait, on a alors $n-1$ choix possible pour le second élément du *k-uplet* (pas de répétition !).

Ainsi de suite, les positions $1,2,\ldots,k-1$ du $k$-uplet étant occupées par un élément de $E$, il reste donc pour le dernier éléments du *k-uplet*, $n-(k-1)$ éléments de $E$ comme choix possibles.

Dénombrer les $k$-uplets d'éléments de $E$ deux à deux distincts revient à chercher le cardinal du produit cartésien suivant constituant $E$ :

$E_1 \times E_2 \times \ldots\ldots \times E_k$ où : $E_1 = E$ (choix du 1° élément *du k-uplet*, noté $x_1$) ; $E_2 = E_1 - \{x_1\}$ donc *card* $(E_2)=n-1$.

*etc…..* $E_k = E_1-\{x_1 ; x_2 ; \ldots ; x_{k-1}\}$, donc $card(E_k)=n-(k-1)$.

D'après le principe multiplicatif, on a donc : $\boldsymbol{n(n-1)\ldots(n-k+1)}$ *k-uplets* d'éléments deux à deux distincts dans $E$.

***Exercice 4***

*a*) Sur un clavier numérique, combien y-a-t-il de codes à quatre chiffres distincts ?

*b*) Combien de mots de 7 lettres sans aucune lettre répétée peut-on écrire à l'aide de l'alphabet français ?

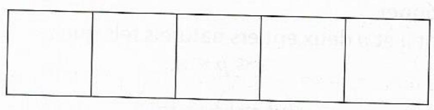
*c*) A une compétition participent 20 athlètes. En fin de compétition un podium est constitué d'une médaille d'or, une médaille d'argent et une médaille de bronze.

Déterminer le nombre de podium différents qu'on peut réaliser avec ces 20 athlètes.

*d*) Une urne contient 10 boules numérotées de 1 à 10. On tire une première boule de l'urne, puis sans la remettre, on tire une seconde boule de l'urne, et enfin sans remettre les boules tirées on procède à un troisième tirage de boule de l'urne.

Déterminer le nombre de tirages possibles de ces trois boules de l'urne, en tenant compte de l'ordre.

*e*) On considère le motif suivant.



Combien y a-t-il de façons de colorier le motif :
a. à l'aide de quatre couleurs ?
b. à l'aide de six couleurs, sans utiliser deux fois la même couleur ?
c. à l'aide de trois couleurs sans que deux cases adjacentes ne soient de la même couleur ?

## ***3) Permutations***

***Définition***

$n$ est un entier naturel non nul et $\boldsymbol{E}$ un ensemble à $\boldsymbol{n}$ éléments.

Une ***permutation de E*** est un ***n-uplet*** d'éléments deux à deux distincts de ***E.***

***Exemples***

Si $E = \{a ; b ; c\}$, alors le triplet $(b ; a ; c)$ est une permutation de $E$, $(c ; b ; a)$ est une autre permutation de $E$.

Déterminer toutes les permutations de l'ensemble $E$ et préciser leur nombre.

***Propriété***

♥♥***Le nombre de permutations d'un ensemble à n éléments ($n \geq 1$) est égal à : ……..***♥♥

*Preuve : Il suffit d'appliquer la propriété précédente qui donne le nombre de k-uplets de E lorsque $k = n$.*

*Le nombre de n-arrangements de E, c'est-à-dire le nombre de permutations de E est égal à :*

$n(n-1)\ldots\ldots(n-n+1) = n(n-1)\ldots\times 1 = n!$

*Remarque* : ***dans une permutation, l'ordre des éléments est fondamental, et tous les éléments de E figurent une fois et une seule au sein de cette permutation.***

***Exercice 5***

1) Combien de mots de 5 lettres (ayant un sens ou pas) peut-on former avec les 5 lettres du mot *CHIEN* ?

*Culture : ces mots sont appelés des anagrammes du mot CHIEN, c'est-à-dire des mots s'écrivant avec exactement les mêmes lettres que celles du mot CHIEN.*

2) 10 chevaux font une course. Combien y-a-t-il d'ordre d'arrivée possibles (en supposant qu'il n'y a pas d'ex-aequo et que tous terminent la course) ?

3) Lucie souhaite ranger horizontalement sur un même étage de sa bibliothèque ses 4 livres de Mathématiques différents, 3 livres de Physique différents et 2 livres de SVT distincts.

*a*) Dénombrer le nombre de façon de ranger tous ses livres.

*b*) Combien existe-t-il de façons différentes de ranger tous ses livres en les regroupant par matière ?

3) Si l'on faisait une photo des 93 valeureux élèves ayant choisi la spécialité maths au LAB durant l'année scolaire 2024-2025, placés sur un banc rectiligne suffisamment long, de combien de façons pourrait-on les placer sur ce banc ?

Comparer au nombre d'atomes de l'univers estimé à $10^{80}$.

***Exercice 6***

On prendra pour longueur d'une année 365 jours.

1) Dans une classe de 23 élèves, déterminer la probabilité qu'il y ait au moins deux élèves qui aient la même date d'anniversaire (indépendamment de l'année de naissance).

Donner la valeur exacte à l'aide de factorielles, puis une valeur approchée au centième près (utiliser Python, votre calculatrice risque d'être en dépassement de capacité sinon).

2) Reprendre cette question avec une classe de 31 élèves, puis une autre classe de 35 élèves, puis une assemblée de 50 personnes.

Ces résultats vous surprennent-ils ?

## 4) Combinaisons

*Définition*

Soit $n$ un entier naturel et $E$ un ensemble à $n$ éléments et $k$ un entier naturel tel que : $0 \leq k \leq n$.

♥♥On appelle ***combinaison de k éléments de E toute partie*** (= sous-ensemble) *de E* ***ayant k éléments, (c'est-à-dire de cardinal k).*** ♥♥

*Exemple*

Si $E = \{1 ; 2 ; 3 ; 4 ; 5\}$, alors $\{1 ; 5\}$ est une combinaison de deux éléments de $E$.

$\{5 ; 1\}$ désigne la même combinaison que $\{1 ; 5\}$ !

D'après le paragraphe initial sur les ensembles, on peut donc dire que :

*Remarques fondamentales*

- ***Dans une combinaison, l'ordre des éléments n'intervient pas !***
- ***Dans une combinaison, il n'y a aucune répétition d'élément !***
- ***Si p> n, alors il n'y a aucune (=0) combinaison de p éléments dans un ensemble de cardinal n.***

*Notation*

Le nombre de combinaisons de $k$ éléments pris parmi les $n$ éléments de $E$ se note : $\binom{n}{k}$ et se lit :

$k$ parmi $n$. ♥♥ *Le nom savant de* $\binom{n}{k}$ *est coefficient binomial*♥♥.

*Exemple*

Soit $E = \{a ; b ; c\}$. Ici, $card(E)$ = ……., donc $n$ = …..

1$a$) Ecrire la liste des combinaisons de $E$ formées d'un seul élément :

1$b$) Combien y a-t-il de telles combinaisons ? En déduire la valeur de $\binom{3}{1}$.

2) Ecrire la liste des combinaisons de $E$ formées de *deux* éléments. Combien y-en-a-t-il ? Valeur de $\binom{3}{2}$ ?

3) Ecrire la liste des combinaisons de $E$ formées de 3 éléments. En déduire la valeur de $\binom{3}{3}$.

4) Combien vaut $\binom{3}{0}$ ? Pourquoi ?

✂------------------------------------------------------------------------

**Exercice 7**

Trouver les valeurs de : $\binom{n}{n}$ ; $\binom{n}{0}$ et $\binom{n}{1}$ en expliquant votre démarche.

✂-----------------------------------------------------------------------------------

Nous allons établir une relation fondamentale permettant de calculer la valeur de $\binom{n}{k}$.

***Propriété clé***

*Soient n et k deux entiers naturels tels que :* $0 \leq k \leq n$.

♥♥ $\binom{n}{k}$ = ..............................♥♥

***Remarque*** *: si k≥ 1, alors* $\binom{n}{k}$ = ..............................................(*notation en extension*).

*Preuve* : ✂---------------------------------------------------------------------------

*Cas particulier récurrents* : ♥♥ $\binom{n}{0}$ = ..... ; $\binom{n}{1}$ = ..... ; $\binom{n}{n}$ = ........

Si $n \geq 2$, $\binom{n}{2}$ = ............... ♥♥

Calculer (sans calculatrice), la valeur exacte de $\binom{10}{7}$.

*Remarque* : sur T.I, pour avoir la valeur précédente, on tapera la séquence suivante :

10 $\boxed{math}$ $\boxed{PROB}$ $\boxed{3}$ : Combinaison 7 : à l'écran s'affichera ${}_7C_{10}$ et en faisant entrée on a le résultat.

Attention à mettre en premier le cardinal de l'ensemble $E$ (ici 10) !

**Exercice 8**

Dans le groupe de terminale maths G1, il y a 32 élèves, et on doit choisir trois élèves pour représenter la classe pour une réunion. Déterminer combien de choix on peut faire.

✂-----------------------------------------------------------------------------------

**Exercice 9**

1) On a un jeu de belote formé de 32 cartes deux à deux distinctes. Une main de 5 cartes est un ensemble de 5 cartes prises simultanément dans le jeu et dans lequel l'ordre n'importe pas.

Combien y-a-t-il de mains de 5 cartes dans le jeu de belote ?

2) Combien y-a-t-il de mains de 5 cartes contenant 3 cœurs et 2 piques ? On rappelle qu'il y a 8 cœurs et 8 piques dans le jeu de belote.

***Exercice 10*** (*où comment faire rêver les examinateurs au grand oral…*)

Remplir une grille de loto consiste à choisir cinq numéros de 1 à 49 (l'ordre ne compte pas) et un numéro chance de 1 à 10.

*a*) Combien de grilles différentes de loto peut-on remplir ?

*b*) Calculer la probabilité de gagner le gros lot, c'est-à-dire d'obtenir les cinq numéros et le numéro chance sortis lors du tirage. Et celle d'avoir "seulement" les cinq numéros ?

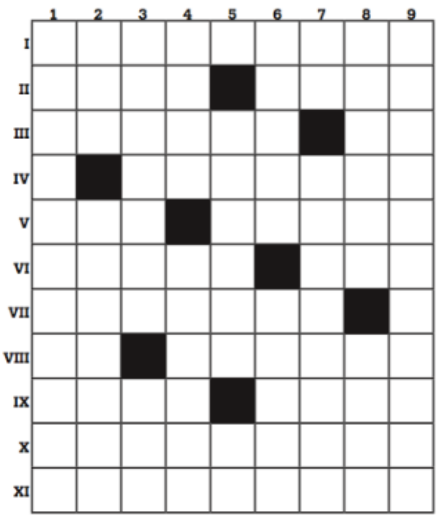
Commentaires (2,20€ la grille) ?

*c*) Combien de grilles sont constituées uniquement de nombres pairs ?

✂------------------------------------------------------------------------

***Exercice 11***

La grille rectangulaire ci-contre est une grille de mots croisés :




1) Déterminer le nombre de ces grilles contenant exactement 8 cases noires.

2) Combien de grilles n'ont aucun coin noir ?

3) Combien de grilles ont exactement deux coins en noir ?

✂------------------------------------------------------------------------

***Exercice 12***

Dans une classe comportant 16 filles et 13 garçons, on doit élire un bureau formé de 4 élèves.

*a*) Combien peut-on former de bureaux si on n'impose aucune contrainte ?

*b*) Combien y-a-t-il de tels bureaux respectant la parité ?

✂------------------------------------------------------------------------

***Exercice 13***

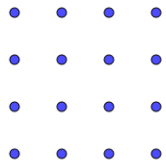
1*a*) On trace 7 droites du plan de telle sorte que deux droites quelconques tracées ne soient jamais parallèles et que trois droites quelconques tracées ne soient jamais concourantes.

Dénombrer le nombre total de points d'intersection qui apparaissent sur la figure.

1*b*) Sept équipes s'affrontent lors d'un tournoi, chacune devant rencontrer une fois et une seule toutes les autres.

Dénombrer combien de parties on va devoir organiser. (De deux façons différentes).

2) A partir de la grille ci-contre, déterminer :



Le nombre total de triangles (éventuellement aplatis) que l'on peut construire et dont les sommets sont des points de la grille ci-dessus.

✂-------------------------------------------------------------------------------------

***Exercice 14***

Un code formé de six chiffres est tapé sur un clavier numérique (constitué des dix chiffres).

*a*) Combien de tels codes contiennent exactement deux fois le chiffre 1 ?

*b*) Combien de codes ont leurs chiffres rangés par ordre strictement croissant ? (Par exemple, 2-4-5-7-8-9 est un tel code).

*c*) Combien de codes comporte un chiffre répété exactement trois fois ?

✂-------------------------------------------------------------------------------------

***Exercice 15***

Soit $n$ un entier supérieur ou égal à 3.

Déterminer le nombre de diagonales ( = segment reliant deux sommets non consécutifs) d'un polygone convexe à $n$ côtés.

✂-------------------------------------------------------------------------------------

***Exercice 16***

Dénombrer les anagrammes des mots suivants :

*a*) POINTER

*b*) DENOMBREMENT

✂-------------------------------------------------------------------------------------

***Exercice 17***

Un bit est une unité qui ne peut prendre que deux valeurs : 0 ou 1.

On appelle *octet* tout ensemble ordonné formé de 8 bits.

*a*) Donner le nom mathématique d'un octet.

*b*) Combien y-a-t-il d'octets différents en tout ?

*c*) Combien d'octets commencent par 0 et finissent par 1 ?

*d*) Combien d'octets contiennent exactement trois 1 ?

*e*) Combien d'octets contiennent plus de 0 que de 1 ?

***<u>Propriété de symétrie du nombre de combinaisons</u>***

*Soient n et k deux entiers naturels tels que :* $0 \le k \le n$. *Alors* ♥♥ $\binom{n}{k} = \ldots\ldots$ ♥♥

*<u>Preuve</u>* :

*<u>Méthode 1</u> : Par le calcul, en utilisant les factorielles :*

✂------------------------------------------------------------------------------------------------

*<u>Méthode 2</u>* : (*préférable*)

*Soit E un ensemble a n éléments, vu que* $0 \le k \le n$, $\binom{n}{k}$ *est donc le nombre de parties de E constituées de k éléments distincts de E.*

*Or, à chacune des parties de E constituée de k éléments distincts correspond une unique partie de E contenant tous les autres éléments de E, au nombre de* $n-k$ *(appelée la partie complémentaire de la partie choisie dans E).*

*Il y a donc autant de parties de E à k éléments que de parties de E à* $n-k$ *éléments.*

*Or le nombre de parties de E à* $n-k$ *éléments est égal à : ……….*

*D'où la relation.*

*<u>Exemple</u>*

Calculer astucieusement : $\binom{30}{29}$ ; $\binom{9}{7}$.

***<u>Propriété</u> : relation du triangle de Pascal***

Pour tout entier $n \ge 1$ et tout entier $k$ tel que : $1 \le k \le n-1$, on a : $\binom{\boldsymbol{n}}{\boldsymbol{k}} = \binom{\ldots}{\ldots} + \binom{\ldots}{\ldots}$

*<u>Preuve</u>* : *<u>Méthode 1</u>* : *avec du calcul et des factorielles :*

✂------------------------------------------------------------------------------------------------

*<u>Méthode 2</u>* : (*par le dénombrement, donc préférable*).

*Soit E un ensemble à n éléments, où* $n \ge 1$ et $k$ un entier tel que $1 \le k \le n-1$.

*On sait que* $\binom{n}{k}$ *est le nombre de parties de E à k éléments distincts.*

*Soit x un élément quelconque de l'ensemble E :*

*Il existe deux sortes de parties de E à k éléments distincts :*

*Celles qui contiennent l'élément x et celles qui ne contiennent pas l'élément x.*

*Or les parties de E à k éléments contenant l'élément x sont au nombre de ......... : en effet, fabriquer une partie de E à k éléments revient à adjoindre à l'élément x .......... autres éléments de E.*

*Les parties de E à k éléments ne contenant pas l'élément x sont au nombre de ...........: en effet, fabriquer une parie de E à k éléments ne contenant pas l'élément x revient à fabriquer une partie à k éléments d'un ensemble qui contient ...... éléments.*

*D'après le principe additif, on a donc : (dessin).*

En fait la formule précédente donne un algorithme pour calculer de proche en proche, à l'aide d'un tableau les coefficients binomiaux.

Pour ce faire, on se souvient que : $\binom{0}{0} = 1$ et que pour tout entier *n*, $\binom{n}{0} = 1 = \binom{n}{n}$ .

Considérons le tableau à double entrée suivant :

| $n \backslash k$ | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0 | | | | | | | | |
| 1 | | | | | | | | |
| 2 | | | | | | | | |
| 3 | | | | | | | | |
| 4 | | | | | | | | |
| 5 | | | | | | | | |
| 6 | | | | | | | | |
| 7 | | | | | | | | |

*On complète donc la colonne correspondant à $k = 0$ avec des 1 et la diagonale correspondante à $k = n$ avec des 1 : au-dessus de la diagonale précédente, on ne met rien (car si $k > n$, alors $\binom{n}{k} = 0$, donc cette partie- là du tableau n'a aucun intérêt (vous pouvez la remplir de 0 si le cœur vous en dit !).*

| n \ k | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 1 | | | | | | |
| 1 | 1 | 1 | | | | | |
| 2 | 1 | | 1 | | | | |
| 3 | 1 | | | 1 | | | |
| 4 | 1 | | | | 1 | | |
| 5 | 1 | | | | | 1 | |
| 6 | 1 | | | | | | 1 |

On complète ce tableau grâce à la relation de *Pascal* que l'on réécrit en *:*

$$\binom{n}{k}+\binom{n}{k+1}=$$

$$\binom{n+1}{k+1}: \textit{nouveau coefficient binomial}$$

***Par exemple*** :

Compléter alors ce tableau de proche en proche.

Pourquoi le nom de triangle de Pascal ?

On peut représenter comme suit les coefficients binomiaux, et un triangle apparait alors clairement :

En première ligne, un seul coefficient, 1 qui représente le nombre $\binom{0}{0}$ .

En seconde ligne, deux coefficients qui sont respectivement de gauche à droite : $\binom{1}{0}$ et $\binom{1}{1}$

En troisième ligne, trois coefficients qui sont respectivement de gauche à droite : $\binom{2}{0};\binom{2}{1};\binom{2}{2}$ .

Ainsi de suite…on peut compléter ce dernier avec autant de lignes que l'on veut.

***Triangle de Pascal donnant les valeurs de*** $\binom{n}{k}$ ***pour tous entiers k et n tels que : 0≤ k ≤n≤10.***

1
1 1
1 2 1
1 3 3 1
1 4 6 4 1
1 5 10 10 5 1
1 6 15 20 15 6 1
1 7 21 35 35 21 7 1
1 8 28 56 70 56 28 8 1
1 9 36 84 126 126 84 36 9 1
1 10 45 120 210 252 210 120 45 10 1

***Propriété***

***Pour tout entier naturel n, on a :*** $\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k} = \ldots.$

*Preuve* :

***Exercice 19***

$n$ est un entier naturel non nul.

Par le dénombrement, prouver la formule du capitaine : pour tout entier $k$ tel que : $1 \le k \le n$, on a :

$$k\binom{n}{k} = n\binom{n-1}{k-1}.$$

✎ **En pratique** ✎ Un problème de dénombrement, ça peut vraiment être compliqué, mais il y a tout de même une trinité merveilleuse de modèles de base auxquels on peut presque toujours se ramener.

| Tirages successifs AVEC REMISE<br>=<br>LISTES | Tirages successifs SANS REMISE<br>=<br>ARRANGEMENTS | Tirages SIMULTANÉS<br>=<br>COMBINAISONS |
|---|---|---|

+ loi de Pascal : proba d'obtenir 3° succès lors du 8° lancer….