Chapitre XI — *Somme de variables aléatoires et loi des grands nombres*

I-Rappels

Variable aléatoire discrète

Définir une **variable aléatoire discrète** X pour une expérience aléatoire d'univers Ω, c'est associer à chaque issue de Ω un nombre réel.

La **loi de probabilité de** X associe à chaque valeur prise par X une probabilité :

Valeur prise x_i	x_1	...	x_n
Probabilité $P(X = x_i)$	p_1	...	p_n

$p_1 + p_2 + \ldots + p_n = 1$

L'espérance mathématique (on dit simplement espérance) d'une variable aléatoire X correspond à ***la valeur moyenne*** prise par X si on répète l'expérience aléatoire associée à X un grand nombre de fois. On note $E(X)$ l'espérance de X.

Avec la loi de probabilité donnée par le tableau précédent, on a :

♥♥♥ $E(X) = p_1x_1 + \ldots\ldots + p_nx_n = \sum_{i=0}^{n} p_i x_i$ ♥♥♥

Dans le cas d'un jeu d'argent, l'espérance correspond au ……………………………………………

……………………………………………………

Un ***jeu*** est qualifié d'***équitable*** si l'***espérance*** de la variable aléatoire égale au gain du joueur est ***nulle***.

Définition

La variance de la variable aléatoire X, dont est donnée précédemment la loi de probabilité, est notée V(X), elle est définie par :

♥♥♥ $V(X) = p_1\left(x_1 - E(X)\right)^2 + \cdots\ldots\ldots + p_n\left(x_n - E(X)\right)^2 = \sum_{i=1}^{n} p_i (x_i - E(X))^2$. ♥♥♥

En général, on calcule la variance puis l'écart-type noté $\sigma(X)$, où $\sigma(X) = \sqrt{V(X)}$.

L'écart type est un indicateur de la dispersion des valeurs prises par la variable aléatoire X autour de son espérance. En particulier, au plus l'écart-type est élevé, au plus les valeurs prises par X sont dispersées autour de E(X).

Si une variable aléatoire X est constante, combien vaut sa variance et son écart-type ?

Exemple

Calculer l'espérance, la variance et l'écart type de la variable aléatoire X dont la loi de probabilité est donnée ci-dessous :

x_i	-2	0	3	4
$p(X = x_i)$	0,2	0,4	0,3	0,1

II- Opérations algébriques sur les variables aléatoires

Exemple d'introduction :

Jeux de cartes en double

Un joueur tire au hasard une carte dans un jeu de 32 cartes, puis tire une seconde carte dans un autre jeu de 32 cartes.

On note X la variable aléatoire qui, au premier tirage, associe un gain de 2 € si la carte tirée est un as, un gain de 1 € si la carte tirée est une carte « habillée » (roi, dame, valet), et rien du tout dans les autres cas.

On note Y la variable aléatoire qui, au second tirage, associe un gain de 1 € si la carte tirée est un pique, et rien du tout dans les autres cas.

On appelle Z la variable aléatoire qui, à chaque double tirage, associe le gain total du joueur.

On peut noter cette variable : $Z = X + Y$.

1. Déterminer les valeurs prises par X, par Y et par Z.
2. Donner la loi de X et la loi de Y.
3. **a.** Exprimer l'événement $\{Z = 0\}$ en fonction des événements $\{X = 0\}$ et $\{Y = 0\}$.
   b. En utilisant l'indépendance des deux épreuves, déterminer $P(Z = 0)$.
   c. Calculer de la même façon $P(Z = 3)$.
4. **a.** Déterminer $P(Z = 1)$ en exprimant l'événement $\{Z = 1\}$ comme réunion de deux événements incompatibles.
   b. En déduire $P(Z = 3)$, puis la loi de Z.
5. Calculer l'espérance et la variance des variables X, Y et Z. Que constate-t-on ?

✂--

III- Somme de variables aléatoires

Soit X et Y deux variables aléatoires définies sur l'univers d'une expérience aléatoire donnée.

On suppose que X a pour loi de probabilité :

On suppose que Y a pour loi de probabilités :

-La variable aléatoire somme de X et Y est la variable notée **X+Y** qui prend pour valeurs :

-La loi de probabilité de la variable aléatoire X +Y est :

Pour toute valeur $\boldsymbol{s}$ prise par X+Y, on a : $p(X+Y = \boldsymbol{s}) = \sum_{x_i + y_j = \boldsymbol{s}} p((X = x_i) \cap (Y = y_j))$.

On rappelle que deux épreuves aléatoires X et Y sont dites indépendantes l'une de l'autre, si l'issue obtenue lors de la première épreuve " n'influence pas " l'issue de la seconde.

Si x_i est une issue de X et y_j est une issue de Y, alors les événements : $(X = x_i)$ et $(Y = y_j)$ sont indépendants, et donc on a : $p((X = x_i) \cap (Y = y_j)) = p(X = x_i) \times p(Y = y_j)$.

Donc ***lorsque X et Y sont deux variables aléatoires indépendantes*** :

Pour toute valeur $\boldsymbol{s}$ prise par X+Y, on a :

$$p(X+Y=\boldsymbol{s}) = \sum_{x_i+y_j=\boldsymbol{s}} p((X=x_i)\cap(Y=y_j)) = \sum_{x_i+y_j=\boldsymbol{s}} p(X=x_i)\times p(Y=y_j).$$

Exemple

On dispose de deux urnes. L'une contient trois jetons numérotés 0, 2 et 4 et l'autre contient cinq jetons : trois portent le numéro 1 et deux portent le numéro 3.

L'expérience aléatoire consiste ici à tirer un jeton de chaque urne, et à additionner les numéros obtenus.

S est la variable aléatoire qui donne le résultat obtenu.

a) Donner les lois de probabilité des deux variables aléatoires X et Y telles que : S = X +Y. Que peut-on dire des variables aléatoires X et Y ?
b) Donner la loi de probabilité de S.
c) Vérifier sur cet exemple que E(S) = E(X)+E(Y).

✂--

Définition

Soit X une variable aléatoire définie sur l'univers d'une expérience aléatoire donnée.

On suppose que X a pour loi de probabilité :

Pour tout réel a non nul, on définit la variable aléatoire $\boldsymbol{a}$**X** par :

$\boldsymbol{a}$**X** prend pour valeurs :

La loi de probabilité de la variable aléatoire $\boldsymbol{a}$**X** est :

Exemple

Une entreprise fabrique des machines. X est la variable aléatoire, qui pour un mois donné, est égale au nombre de machines vendues au cours de ce mois. Voici la loi de probabilité de X :

$X=x_i$	0	1	2	3	4	5	6
$p(X=x_i)$	0.04	0.08	0.12	0.28	0.25	0.17	0.06

La vente de chaque machine rapporte 5000€. Soit Y la variable aléatoire égale à la somme rapportée par la vente des machines au cours de ce mois. Donner la loi de Y.

✂--

♥♥♥ ***Propriété de linéarité de l'espérance*** (admise) ♥♥♥

Dans le cadre des définitions précédentes, pour toutes variables aléatoires X et Y et tous réels a et b :

-E(X+Y) =

-E(aX) =

-E(aX+b) =

-E(aX+bY) =

Exemple : Dans l'exemple précédent, calculer E(Y).

Remarques : les formules de linéarité de l'espérance vues précédemment s'étendent à un nombre quelconque de variables aléatoires.

En particulier, si $(X_i)_{1\leq i\leq n}$ est une famille de n variables aléatoires, et S = $\sum_{i=1}^{n} X_i$, on a :
♥♥E(S) = $\sum_{i=1}^{n} E(X_i)$.♥♥

Que dire de l'espérance d'un variable aléatoire constante et égale à un réel b ?

Exercice 1

Soient X et Y deux variables aléatoires définies sur un même univers.

On donne : E(X) = 3,1 et E(Y) = 1,8.

Déterminer l'espérance des variables aléatoires suivantes : *a)* X+Y *b)* 7Y *c)* 2X + Y *d)* X − 5.

✂---

Exercice 2

62 Une urne contient deux boules rouges et une boule jaune. On tire une boule de l'urne : le gain est de 10 € si la boule est rouge, 20 € si elle est jaune.
On réalise 10 tirages successifs avec remise.
On note X la variable aléatoire égale au gain obtenu à l'issue des 10 tirages.
On se propose de déterminer E(X) de deux manières différentes.

1. Première méthode

Pour tout entier i tel que $1 \leqslant i \leqslant 10$, X_i est la variable aléatoire égale au gain lors du i-ième tirage.

a) Calculer $E(X_i)$ pour $1 \leqslant i \leqslant 10$.

b) Exprimer la variable aléatoire X en fonction des X_i et en déduire la valeur de E(X).

2. Deuxième méthode

Y est la variable aléatoire égale au nombre de boules jaunes tirées.

a) Justifier que X = 10Y + 100.

b) Calculer E(Y).

c) En déduire la valeur de E(X).

IV- Variables aléatoires indépendantes

Soit X et Y deux variables aléatoires indépendantes.

Si x_i est une issue de X et y_j est une issue de Y, alors les événements : (X = x_i) et (Y = y_j) sont indépendants, et donc on a : $p((X = x_i) \cap (Y = y_j)) = p(X = x_i) \times p(Y = y_j)$.

Exemple

On lance successivement deux dés cubiques non truqués. X est la variable aléatoire donnant le numéro affiché par le premier dé, et Y est la variable aléatoire donnant le numéro affiché par le second dé.

X et Y sont bien évidemment indépendantes.

Calculer la valeur de : $p((X = 6) \cap (Y = 1))$.

♥♥♥ ***Propriété de la variance de variables aléatoires indépendantes*** (admise) ♥♥♥

Pour toutes variables aléatoires X et Y indépendantes et tous réels a :

-V(X+Y) =

-V(aX) =

Conséquences : Dans le cadre de la propriété précédente, on a également :

Pour tout réel b :

V(X+b) =

V(aX+bY) =

Pour les écarts-types, on a seulement : $\sigma(aX) = \cdots$

En règle générale, même pour des variables aléatoires indépendantes, $\sigma(X + Y) \neq \sigma(X) + \sigma(Y)$.

Exercice 3

39 Émeline s'interroge sur la hauteur de précipitations pour un jour du mois de décembre dans sa ville. On représente cette hauteur, en mm, par la variable aléatoire X. Voici la loi de probabilité de X :

a	0	1	3	6	8	10
P(X = a)	$\frac{1}{2}$	$\frac{2}{15}$	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{15}$

a) Calculer l'espérance et la variance de X.

b) Pour comparer avec une amie anglaise, Émeline doit convertir les hauteurs en pouce.

Sachant que 1 cm vaut environ 0,4 pouce, calculer la variance de la hauteur de précipitations en pouce.

✂---

V- Retour à la loi binomiale

Soit n un entier non nul et p un réel tel que : $0 < p < 1$.

Si X suit la loi binomiale $\mathscr{B}(n\,;\ p)$, alors :

♥♥♥E(X) = ♥♥♥

♥♥♥V(X) = ♥♥♥

♥♥♥$\sigma(X)$ = ♥♥♥

Preuve :

✂---

Exercice 4

41 On lance 200 fois une pièce équilibrée.
X est le nombre d'apparitions de Pile.

a) Quelle est la loi suivie par X ? Préciser ses paramètres.

b) Expliquer pourquoi il serait fastidieux de donner la loi de probabilité sous forme de tableau.

c) Calculer l'espérance de X. Interpréter le résultat.

d) Calculer la variance et l'écart-type de X.

✂---

VI- Echantillon

Exemple

On étudie la fiabilité d'un composant électronique. On appelle X la variable aléatoire égale à 1 si le composant électronique ne se détériore pas suite aux tests effectués et 0 dans le cas contraire.
Le fabricant précise que le composant électronique ne subit pas de détériorations suite aux tests dans 99,8 % des cas.
Dans ce cas, la variable aléatoire X suit la loi de Bernoulli de paramètre 0,998.
On effectue les tests sur un échantillon de 100 composants électroniques prélevés au hasard dans le stock du fabricant.
On peut considérer alors que la liste $(X_1, X_2, X_3, \dots, X_{100})$ forment un échantillon de taille 100 de variables aléatoires suivant la loi de Bernoulli de paramètre 0,998.

Définition

Soit n un entier naturel non nul et X une variable aléatoire définie sur l'ensemble Ω des issues d'une expérience aléatoire.

Un échantillon de taille n de la loi de X est une liste de n variables aléatoires $(X_1\ ;\ X_2\ ;\ \dots\ ;\ X_n)$ indépendantes et identiques (on notera *iid*) qui suivent toutes cette même loi de probabilité.

Exemple

Matt travaille 5 jours dans la semaine, et chaque jour, indépendamment des autres, la probabilité d'aller travailler à vélo est égale à 0,8.

X est la variable aléatoire égale au nombre de jours de la semaine où Matt va travailler à vélo.

Quelle est la loi suivie par X ?

En répétant cette expérience sur une période de 10 semaines, on obtient un échantillon (X_1, X_2, X_3, X_4, X_5, X_6, X_7, X_8, X_9, X_{10}) de taille 10 de cette loi de probabilité.

Somme d'un échantillon, moyenne d'un échantillon

Définition

(X_1 ; X_2 ; ….. ; X_n) désigne un échantillon de taille n de la loi de probabilité suivie par une variable aléatoire X.

La somme de cet échantillon est la variable aléatoire notée S_n, avec : $\boxed{S_n = X_1 + X_2 + \ldots + X_n = \sum_{k=1}^{n} X_k}$.

La moyenne de cet échantillon est la variable aléatoire notée M_n, où : ♥♥♥ $M_n = \frac{S_n}{n}$. ♥♥♥

♥♥♥ ***Propriété de la somme et de la moyenne d'un échantillon*** ♥♥♥

S_n désigne un échantillon de taille n de la loi de probabilité suivie par une variable aléatoire X.

$M_n = \frac{S_n}{n}$ désigne la variable aléatoire moyenne de cet échantillon.

$E(S_n) =$ $\qquad$ $E(M_n) =$

$V(S_n) =$ $\qquad$ $V(M_n) =$

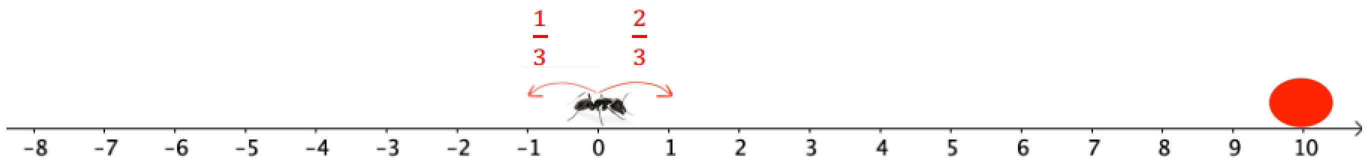
$\sigma(Sn) =$ $\qquad$ $\sigma(Mn) =$

Preuve :

✂---

Exercice 6

Sur un axe gradué, on dépose une petite goûte de confiture à la fraise au point d'abscisse 10.
Pierrot invite Sophie la fourmi à se placer à l'origine de l'axe gradué.
Attirée par la confiture, Sophie se déplace de façon aléatoire d'une unité vers la droite (sens positif) avec la probabilité de $\frac{2}{3}$ et d'une unité vers la gauche (sens négatif) avec la probabilité de $\frac{1}{3}$.
On suppose que les déplacements de la fourmi sont indépendants les uns des autres.
Pour tout entier naturel k, on note X_k la variable aléatoire valant 1 si la fourmi se déplace vers la droite au k-ième déplacement et valant -1 si elle se déplace vers la gauche.
On note $S_n = X_1 + X_2 + \cdots + X_n$ la variable aléatoire somme des X_k.



1) Calculer $E(X_k)$ et $V(X_k)$
2) En déduire $E(S_n)$ et $V(S_n)$.
3) Au bout de combien de déplacements, Sophie peut-elle espérer théoriquement atteindre la goûte de confiture ? Calculer $\sigma(S_n)$ dans ce cas.

✂---

Exercice 7

après Bac, Métropole 2019

Un laboratoire pharmaceutique mène des études sur la vaccination contre la grippe dans une ville.

Après la période hivernale, on interroge au hasard 40 habitants de la ville, on admet que ce choix se ramène à n tirages successifs avec remise.

On suppose que la probabilité qu'une personne choisie au hasard dans la ville soit vaccinée contre la grippe est égale à 0,4.

On note X la variable aléatoire qui donne le nombre de personnes vaccinées parmi les 40 interrogées.

1. a) Quelle est la loi de probabilité suivie par la variable aléatoire X ?

b) Déterminer la probabilité qu'au moins la moitié des personnes interrogées soit vaccinée. *Arrondir au centième.*

c) Calculer l'espérance et l'écart-type du nombre de personnes vaccinées parmi les 40 personnes interrogées. *Arrondir au centième si besoin.*

2. Le laboratoire effectue n fois cette étude, sans enregistrer les noms des habitants interrogés.

M_n est la moyenne du nombre de personnes vaccinées sur ces n sondages.

a) Préciser l'espérance de M_n, puis exprimer l'écart-type de M_n en fonction de n.

b) Quelle est la valeur minimum de n telle que l'écart-type de M_n soit inférieur à 0,5 ?

VII- Inégalités célèbres en probabilités

A- Inégalité de Bienaymé-Tchebytchev

Soit X une variable aléatoire d'espérance $E(X)$, et de variance $V(X)$.

Pour tout réel δ strictement positif, on a : ♥♥♥ $p(|X - E(X)|) \geq \delta) \leq \frac{V(X)}{\delta^2}$. ♥♥♥

Preuve : Donnée à titre culturel, c'est typiquement le genre de preuve qui ne s'invente pas !

Soit $\delta > 0$. Notons $X(\Omega) = \{x_1; x_2; \dots\dots; x_n\}$ l'ensemble des valeurs prises par X.

Soit A l'ensemble des éléments x_i de $X(\Omega)$ tels que : $|x_i - E(X)|) \geq \delta$.

On sait que : $V(X)=\sum_{i=1}^{n} p(X = x_i)\left(x_i - E(X)\right)^2$.

Or $X(\Omega)=A\cup\bar{A}$.

Donc $V(X)=\sum_{i\in A} p(X=x_i)\big(x_i-E(X)\big)^2+\sum_{i\in\bar{A}} p(X=x_i)(x_i-E(X))^2$.

Ainsi, V(X) apparait comme la somme de deux expressions à termes positifs ($p(X=x_i)\geq 0$ et $\big(x_i-E(X)\big)^2\geqslant 0$)), donc V(X) est supérieure ou égale à chacune de ces deux sommes).

<u>En particulier</u>, $V(X)\geqslant \sum_{i\in A} p(X=x_i)\big(x_i-E(X)\big)^2$. (Relation notée *).

Or par définition de l'ensemble A, pour tout élément i appartenant à A, $|x_i-E(X)|)\geq\delta>0$, donc par croissance de la fonction carrée sur $[0\ ;+\infty[$, $(|x_i-E(X)|)^2\geq\delta^2$.

En se souvenant que pour tout réel w, $|w|^2=w^2$, on a : $(x_i-E(X))^2\geq\delta^2$, et par suite, comme $p(X=x_i)\geq 0$, on a : $p(X\geq x_i)\ (x_i-E(X))^2\geq p(X\geq x_i)\delta^2$.

Grâce à *, et en sommant des inégalités de même sens, on a : $V(X)\geqslant \sum_{i\in A} p(X=x_i)\delta^2$.

δ^2 est une constante multiplicative vis-à-vis de l'indice i de la somme, donc par factorisation par δ^2, on a :

$V(X)\geqslant\delta^2\sum_{i\in A} p(X=x_i)$.

Pour conclure, il suffit de constater que: $\sum_{i\in A} p(X=x_i)=p(A)$.

Ainsi, $V(X)\geqslant\delta^2 p(A)$, donc $p(A)\leq\frac{V(X)}{\delta^2}$ ou encore : $p(|X-E(X)|)\geq\delta)\leq\frac{V(X)}{\delta^2}$.

<u>Exemple</u>

Soit une variable aléatoire X qui suit la loi binomiale de paramètres $n=20$ et $p=0{,}1$.
1) Appliquer l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev avec $\delta=2\sigma(X)$. Interpréter.
2) Recommencer avec $\delta=3\sigma(X)$, puis $\delta=4\sigma(X)$. Que constate-t-on ?

✂---

<u>Remarque</u> : cette inégalité est loin d'être optimale et n'est intéressante que si $\frac{V(X)}{\delta^2}\leqslant 1$, c'est-à-dire si $\delta\geq\sigma(X)$. Pourquoi au fait ?

<u>Exercice 8</u>

Les deux parties sont indépendantes.

Un laboratoire fabrique un médicament conditionné sous forme de cachets.

Partie A

Un contrôle de qualité, portant sur la masse des cachets, a montré que 2 % des cachets ont une masse non conforme. Ces cachets sont conditionnés par boîtes de 100 choisis au hasard dans la chaîne de production. On admet que la conformité d'un cachet est indépendante de celle des autres.

On note N la variable aléatoire qui à chaque boîte de 100 cachets associe le nombre de cachets non conformes dans cette boîte.

1. Justifier que la variable aléatoire N suit une loi binomiale dont on précisera les paramètres.

2. Calculer l'espérance de N et en donner une interprétation dans le contexte de l'exercice.

3. *On arrondira les résultats à 10^{-3} près.*

   a. Calculer la probabilité qu'une boîte contienne exactement trois cachets non conformes.

   b. Calculer la probabilité qu'une boîte contienne au moins 95 cachets conformes.

4. Le directeur du laboratoire veut modifier le nombre de cachets par boîte pour pouvoir affirmer : « La probabilité qu'une boîte ne contienne que des cachets conformes est supérieure à 0,5 ».
   Combien de cachets une boîte doit-elle contenir au maximum pour respecter ce critère ? Justifier.

Partie B

On admet que les masses des cachets sont indépendantes les unes des autres. On prélève 100 cachets et on note M_i, pour i entier naturel compris entre 1 et 100, la variable aléatoire qui donne la masse en gramme du i-ème cachet prélevé.

On considère la variable aléatoire S définie par :

$$S = M_1 + M_2 + \ldots + M_{100}.$$

On admet que les variables aléatoires M_1, M_2, ..., M_{100} suivent la même loi de probabilité d'espérance $\mu = 2$ et d'écart-type σ.

1. Déterminer $E(S)$ et interpréter le résultat dans le contexte de l'exercice.
2. On note s l'écart type de la variable aléatoire S.
   Montrer que : $s = 10\sigma$.

3. On souhaite que la masse totale, en gramme, des comprimés contenus dans une boîte soit strictement comprise entre 199 et 201 avec une probabilité au moins égale à 0,9.
   a. Montrer que cette condition est équivalente à :
   $$P(|S - 200| \geqslant 1) \leqslant 0,1.$$
   b. En déduire la valeur maximale de σ qui permet, à l'aide de l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev, d'assurer cette condition.Bienaymé-Tchebychev

B- <u>Inégalité de concentration</u>

S_n désigne un échantillon de taille n de la loi de probabilité suivie par une variable aléatoire X.

$S_n = X_1 + X_2 + \ldots + X_n$ où chaque variable aléatoire X_i sont identiques et indépendantes et suivent la même loi de probabilité que X.

$M_n = \frac{S_n}{n}$ désigne la variable aléatoire moyenne de cet échantillon.

Pour tout réel δ strictement positif, on a : ♥♥♥$p(|Mn - E(X)| \geq \delta) \leq \frac{V(X)}{n\delta^2}$. ♥♥♥***(appelée inégalité de concentration).***

<u>Preuve</u> **:** déduction de l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev appliquée à la variable aléatoire M_n, en se souvenant que : $E(M_n)=E(X)$ et $V(M_n) = \frac{1}{n}V(X)$.

Exemple d'utilisation **(*important*)**

Soit une variable aléatoire X qui suit la loi de Bernoulli de paramètre 0,2.
On considère un échantillon de n variables aléatoires suivant la loi de X.
On appelle M_n la variable aléatoire moyenne associée à cet échantillon.
Déterminer la taille n de l'échantillon tel que la probabilité que la moyenne M_n appartienne à l'intervalle $]0{,}03\,;0{,}37[$ soit supérieure à 0,95.

✂---

C- Loi faible des grands nombres

S_n désigne un échantillon de taille n de la loi de probabilité suivie par une variable aléatoire X.

$M_n = \frac{S_n}{n}$ désigne la variable aléatoire moyenne de cet échantillon.

Pour tout réel δ strictement positif, on a : $\lim\limits_{n\to+\infty} p(|Mn - E(\mathrm{X})| \geq \delta) = 0$.

Justification et interprétation :

La loi des grands nombres dit qu'au plus la taille de l'échantillon d'une variable aléatoire X est grande, au plus l'écart entre la moyenne de cet échantillon et l'espérance de X se rapproche de 0.

Exercice 9

Soit une variable aléatoire X d'espérance 3 et de variance 0,2.
Soit M_n la variable aléatoire moyenne d'un échantillon de taille n de la variable aléatoire X.
1) Déterminer un majorant de $P(|M_n - 3| \geq 0{,}1)$ pour $n = 100$, pour $n = 1000$, puis pour $n = 10\,000$. Que constate-t-on ?
2) Démontrer et interpréter le résultat précédent.

✂---

Exercice 10

La société demande à un institut de sondage de faire une enquête sur le profil de ses clients réguliers. L'institut a élaboré un questionnaire en ligne constitué d'un nombre variable de questions.
On choisit au hasard un échantillon de 1 000 clients réguliers, à qui le questionnaire est proposé. On considère que ces 1 000 clients répondent.

- Pour les remercier, la société offre un bon d'achat à chacun des clients de l'échantillon. Le montant de ce bon d'achat dépend du nombre de questions posées au client.
- La société souhaite récompenser particulièrement les clients de l'échantillon qui ont acheté une carte de fidélité et, en plus du bon d'achat, offre à chacun d'eux une prime d'un montant de 50 euros versée sur la carte de fidélité.

On note Y_1 la variable aléatoire qui, à chaque échantillon de 1 000 clients réguliers, associe le total, en euros, des montants du bon d'achat des 1 000 clients.
On admet que son espérance $E(Y_1)$ est égale à 30 000 et que sa variance $V(Y_1)$ est égale à 100 000.
On note X_2 la variable aléatoire qui, à chaque échantillon de 1 000 clients réguliers, associe le nombre de clients ayant acheté la carte de fidélité parmi eux, et on note Y_2 la variable aléatoire qui, à chaque échantillon de 1 000 clients, associe le total, en euros, des montants de la prime de fidélité versée.
On admet que X_2 suit la loi binomiale de paramètres 1 000 et 0,47 et que $Y_2 = 50X_2$.

1. Calculer l'espérance $E(X_2)$ de la variable X_2 et interpréter le résultat dans le contexte de l'exercice.

On note $Y = Y_1 + Y_2$ la variable aléatoire égale au total général, en euros, des montants offerts (bon d'achat et prime de fidélité) aux 1 000 clients. On admet que les variables aléatoires Y_1 et Y_2 sont indépendantes.

On note Z la variable aléatoire définie par $Z = \dfrac{Y}{1000}$.

2. Préciser ce que modélise la variable Z dans le contexte de l'exercice.
   Vérifier que son espérance $E(Z)$ est égale à 53,5 et que sa variance $V(Z)$ est égale à 0,722 75.
3. À l'aide de l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev, vérifier que la probabilité que Z soit strictement compris entre 51,7 euros et 55,3 euros est supérieure à 0,75.

<u>Exercice final</u> (partie d'exercice, Métropole 2024)

1.

On interroge au hasard dix étudiants.

Les variables aléatoires $N_1, N_2, \ldots, N_{10}$ modélisent la note sur 20 obtenue à l'examen par chacun d'entre eux. On admet que ces variables sont indépendantes et suivent la même loi binomiale de paramètres (20 ; 0,615).

Soit S la variable définie par $S = N_1 + N_2 + \ldots + N_{10}$.

Calculer l'espérance $E(S)$ et la variance $V(S)$ de la variable aléatoire S.

2.

On considère la variable aléatoire $M = \dfrac{S}{10}$.

a. Que modélise cette variable aléatoire M dans le contexte de l'exercice?

b. Justifier que $E(M) = 12{,}3$ et $V(M) = 0{,}47355$.

c. À l'aide de l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev, justifier l'affirmation ci-dessous.
« La probabilité que la moyenne des notes de dix étudiants pris au hasard soit strictement comprise entre 10,3 et 14,3 est d'au moins 80 % ».