« En mathématiques, on ne comprend pas les choses, on s'y habitue ». John Von Neuman

Chapitre X Orthogonalité dans l'espace-Equations cartésiennes de plans

I-Orthogonalité dans l'espace

A-Généralités

Définition

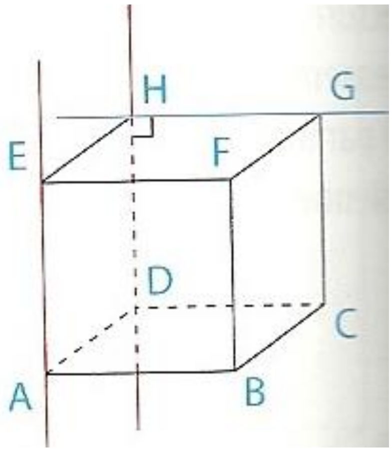
Deux droites de l'espace sont ***orthogonales*** lorsque l*eurs parallèles respectives menées d'un point quelconque* de l'espace sont ***perpendiculaires.***

Exemple

Dans le cube ci-contre, (AE) et (GH) sont orthogonales :

Pourquoi ?

Citer d'autres droites orthogonales.



Remarque

Les termes *"perpendiculaires"* et *"orthogonal"* sont souvent confondus : c'est un abus !

En effet, deux droites perpendiculaires sont coplanaires et sécantes, alors que deux droites orthogonales ne sont pas nécessairement coplanaires, et *a fortiori*, pas nécessairement sécantes.

Définition

Deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ non nuls, sont orthogonaux s'ils sont des vecteurs directeurs de deux droites orthogonales.

Dans l'exemple précédent, les vecteurs $\overrightarrow{BC}$ et $\overrightarrow{EF}$ sont orthogonaux.

B) Produit scalaire dans l'espace

Soit $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs ***de l'espace***.

Nous allons voir qu'il est licite de parler de produit scalaire de $\vec{u}$ et $\vec{v}$.
On va se ramener à la définition du produit scalaire de deux vecteurs situés dans un MEME PLAN.

Fixons un point A quelconque de l'espace.
On sait qu'il existe alors un unique point B tel que…………….., et un unique point C tel que …………

Illustration :

Avec ce choix de représentants de $\vec{u}$ et $\vec{v}$, $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont situés dans un même plan, le plan (ABC).

Définition

On appelle produit scalaire des vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$, le produit scalaire $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}$, calculé dans le plan (ABC).

Propriété : Toutes les propriétés du produit scalaires énoncées dans le plan s'étendent à l'espace :

En particulier :

1) Soit $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs non nuls de l'espace, on a la formule bien pratique :

♥♥♥ ♥♥♥

2) $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont orthogonaux si et seulement si $\vec{u}.\vec{v} = 0$. Cette propriété fondamentale est d'un usage récurrent dans les exercices. On notera $\vec{u} \perp \vec{v}$ pour dire que $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont orthogonaux.

3) Le carré scalaire d'un vecteur $\vec{u}$ est par définition le produit scalaire du vecteur $\vec{u}$ par lui-même : $\vec{u}.\vec{u}$ est noté $\vec{u}^{\,2}$.
Grâce à la formule bien pratique 1), on a donc : $\vec{u}^{\,2} =$ ……….

En particulier, pour tous points A et B, ♥♥♥ $\overrightarrow{AB}^2 = \left\|\overrightarrow{AB}\right\|^2 = AB^2$ ♥♥♥

4) Enfin, les règles de calcul du produit scalaire du plan s'étendent à l'espace :
Pour tout vecteur $\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{w}$ de l'espace :

$\vec{u}.\vec{v} = \vec{v}.\vec{u}$ (on dit que le produit scalaire est commutatif).

$\vec{u}.(\vec{v}+\vec{w}) = \vec{u}.\vec{v} + \vec{u}.\vec{w}$. (Distributivité du produit scalaire sur l'addition de vecteurs).

Pour tout réel k, $(k\,\vec{u}).\vec{v} = \vec{u}.(k\,\vec{v}) = k(\vec{u}.\vec{v})$.
5)
$\left\|\vec{u}+\vec{v}\right\|^2 =$

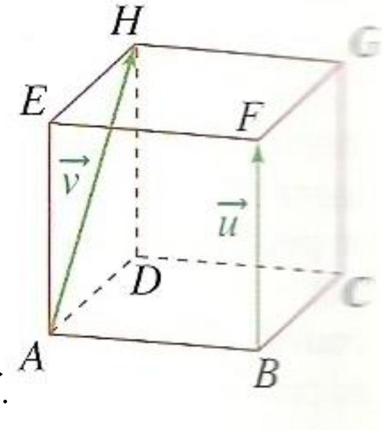
$\left\|\vec{u}-\vec{v}\right\|^2 =$

En particulier, on a : $\vec{u}.\vec{v} =$ …………………………………….. = ………………………………………..

Ces dernières formules sont appelées formules de polarisation, et expriment le produit scalaire $\vec{u}.\vec{v}$ en fonction des normes des vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{u}+\vec{v}$ et $\vec{u} - \vec{v}$.

Preuve : il suffit de considérer un plan (P) tel que $\vec{u}$ et $\vec{v}$ admettent des représentants dans (P), et d'appliquer les règles du produit scalaires vues dans le plan en première.

Pour la 5) : $\left\|\vec{u}+\vec{v}\right\|^2 = (\vec{u}+\vec{v})^2 = (\vec{u}+\vec{v}).(\vec{u}+\vec{v}) = \vec{u}.(\vec{u}+\vec{v}) + \vec{v}.(\vec{u}+\vec{v}) = \vec{u}.\vec{u}+\vec{u}.\vec{v}+\vec{v}.\vec{u}+\vec{v}.\vec{v}$ $\left\|\vec{u}\right\|^2 + 2\vec{u}.\vec{v} + \left\|\vec{v}\right\|^2$.



Exemple

Soit ABCDEFGH un cube d'arête 1.

a) Calculer $\overrightarrow{BF}.\overrightarrow{AH}$.

b) En utilisant la décomposition : $\overrightarrow{BH} = \overrightarrow{BF}+\overrightarrow{FE}+\overrightarrow{EH}$, calculer : $\overrightarrow{BH}.\overrightarrow{CG}$.

Définition

Une base ($\vec{i}$; $\vec{j}$; $\vec{k}$) de l'espace est dite *orthonormée* lorsque les vecteurs $\vec{i}$, $\vec{j}$ et $\vec{k}$ sont deux à deux orthogonaux et de même norme égale à 1 : $\vec{i} \perp \vec{j}$; $\vec{i} \perp \vec{k}$ et $\vec{j} \perp \vec{k}$, et de plus, $\|\vec{i}\| = \|\vec{j}\| = \|\vec{k}\| = 1$.

Exemple : dans le cube précédent, citer une base orthonormée de l'espace.

Un repère orthonormé (O ; $\vec{i}$; $\vec{j}$; $\vec{k}$) est la donnée d'un point O de l'espace et d'une base orthonormée ($\vec{i}$; $\vec{j}$; $\vec{k}$).

Nous travaillerons dans toute la suite du chapitre exclusivement dans des repères orthonormés.

***Théorème* (utile pour le bac, et en mécanique …)**

Si l'espace est muni d'un repère orthonormé (O ; $\vec{i}$; $\vec{j}$; $\vec{k}$), et si $\vec{u}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}$, alors :

1) ♥♥♥ $\vec{u}.\vec{v}$ = = ♥♥♥

En particulier, $\|\vec{u}\|$ = (fondamental, à bien retenir).

$\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont donc orthogonaux si et seulement si :

En particulier, deux droites de l'espace respectivement dirigées par les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont donc orthogonales si et seulement si :

2) Si A (x_A ; y_A ; z_A) et B (x_B ; y_B ; z_B), alors :

♥♥♥ AB = ♥♥♥

Preuve

$\vec{u}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ donc $\vec{u} = x\,\vec{i} + y\,\vec{j} + z\,\vec{k}$, et $\vec{v}\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}$ donc : $\vec{v} = x'\,\vec{i} + y'\,\vec{j} + z'\,\vec{k}$.

*)

$\vec{u}\cdot\vec{v} = (x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k})\cdot(x'\vec{i} + y'\vec{j} + z'\vec{k})$

distributivité du pdt scalaire.

$\vec{u}\cdot\vec{v} = (x\vec{i}\cdot x'\vec{i}) + (x\vec{i})\cdot(y'\vec{j}) + (x\vec{i})\cdot(z'\vec{k}) + (y\vec{j})\cdot(x'\vec{i}) + (y\vec{j})\cdot(y'\vec{j}) + (y\vec{j})\cdot(z'\vec{k})$
$+ (z\vec{k})\cdot(x'\vec{i}) + (z\vec{k})\cdot(y'\vec{j}) + (z\vec{k})\cdot(z'\vec{k})$.

$\vec{u}\cdot\vec{v} = xx'(\vec{i}\cdot\vec{i}) + (xy')\vec{i}\cdot\vec{j} + (xz')\vec{i}\cdot\vec{k} + yx'(\vec{j}\cdot\vec{i}) + (yy')\vec{j}\cdot\vec{j} + (yz')\vec{j}\cdot\vec{k}$
$+ (zx')\vec{k}\cdot\vec{i} + (zy')\vec{k}\cdot\vec{j} + (zz')(\vec{k}\cdot\vec{k})$

Or $\vec{i}\perp\vec{j}$, donc $\vec{i}\cdot\vec{j} = 0 = \vec{j}\cdot\vec{i}$; $\vec{j}\perp\vec{k}$, donc $\vec{j}\cdot\vec{k} = \vec{k}\cdot\vec{j} = 0$; $\vec{i}\perp\vec{k}$ donc $\vec{i}\cdot\vec{k} = 0 = \vec{k}\cdot\vec{i}$.

Par suite :

$\vec{u}\cdot\vec{v} = xx'\|\vec{i}\|^2 + yy'\|\vec{j}\|^2 + zz'\|\vec{k}\|^2$ CAR $\vec{i}\cdot\vec{i} = \|\vec{i}\|\times\|\vec{i}\|\times\underbrace{\cos(0)}_{1}$.

Formule du Physicien !

idem pour $\vec{j}\cdot\vec{j}$ et $\vec{k}\cdot\vec{k}$.

$(\vec{i};\vec{i}) = 0\ [2\pi]$

Donc $\boxed{\vec{u}\cdot\vec{v} = xx' + yy' + zz'}$

**)

Faisons $\vec{v} = \vec{u}$:

$\vec{u}\cdot\vec{u} = x^2 + y^2 + z^2$ et $\vec{u}\cdot\vec{u} = \|\vec{u}\|\times\|\vec{u}\|\times\cos(0) = \|\vec{u}\|^2$

Donc $\|\vec{u}\|^2 = x^2 + y^2 + z^2$, et comme $\|\vec{u}\| \geq 0$, on a :

$\boxed{\|\vec{u}\| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$ #

***)

Posons $\vec{u} = \vec{AB}$: alors $\vec{u}\begin{pmatrix} x_B - x_A \\ y_B - y_A \\ z_B - z_A \end{pmatrix}$ et la relation # conduit au

résultat voulu : $\|\vec{u}\| = \|\vec{AB}\| = \boxed{AB = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2 + (z_B - z_A)^2}}$

Exercice 1

Soit $(O\ ;\ \vec{i}\ ;\ \vec{j}\ ;\ \vec{k})$ un R.O.N de l'espace, et (d) et (d') les droites qui ont pour R.P. respectives :

(d) : $\begin{cases} x = 1 + t \\ y = -1 + 2t \\ z = 2 + t \end{cases}$ avec $t \in \mathbb{R}$ et (d') : $\begin{cases} x = -1 - s \\ y = 5 \\ z = 2 + s \end{cases}$ avec $s \in \mathbb{R}$.

Démontrer que (d) et (d') sont orthogonales.

<u>Exercice 2</u> ***(hyper classique)***

Soit A(0 ; 1 ; 2), B(1 ; -1 ; 3) et C(-1 ; 2 ; 0) des points d'un repère orthonormé $(O ; \vec{i} ; \vec{j} ; \vec{k})$.

a) Calculer $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}$.

b) En déduire une mesure de $(\overrightarrow{AB} ; \overrightarrow{AC})$ arrondie au degré près.

✂---

<u>Exercice 3</u>

Soit ABCD un tétraèdre régulier d'arête de longueur *a*, et I le milieu de [AB].

a) Exprimer en fonction de *a* chacun des produits scalaires : $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AD}$.

b) En déduire que les droites (AB) et (CD) sont orthogonales.

Par ce procédé, on peut démontrer que les arêtes opposées d'un tétraèdre <u>régulier</u> sont orthogonales.

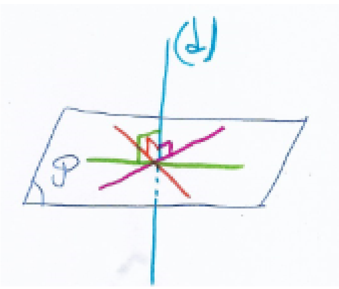
✂---

<u>*II – Vecteur normal à un plan*</u>

<u>*Définition*</u>

Une droite (d) est orthogonale à un plan $\mathcal{P}$ lorsqu'elle est orthogonale à ***toutes*** les droites du plan $\mathcal{P}$.

<u>*Illustration*</u> :



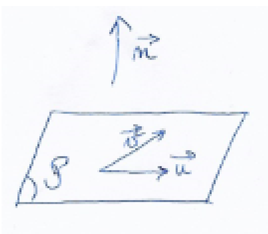
<u>*Définition*</u>

Soit $(\mathcal{P})$ un plan, et $\vec{n}$ **un vecteur <u>non nul</u>** de l'espace.
On dit que $\vec{n}$ est un <u>vecteur normal au plan $(\mathcal{P})$</u> s'il est orthogonal à tout vecteur du plan $(\mathcal{P})$.

<u>Propriété</u>

Soit $\vec{n}$ un vecteur non nul de l'espace, et $(\mathcal{P})$ un plan de l'espace.
$\vec{n}$ est normal au plan $(\mathcal{P})$ si et seulement si il est orthogonal à deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ non colinéaires de $(\mathcal{P})$.

<u>*Preuve :*</u>



Le sens direct est évident : si $\vec{n}$ est normal au plan $(\mathcal{P})$, alors, par définition, il est orthogonal à tous les vecteurs du plan $(\mathcal{P})$, donc en particulier, il est orthogonal à deux quelconques vecteurs non colinéaires de $(\mathcal{P})$.
Réciproquement, supposons que $\vec{n}$ soit orthogonal à deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ non colinéaires de $(\mathcal{P})$:
Alors, $(\vec{u}\ ;\ \vec{v})$ forme une base de $(\mathcal{P})$ vu que ces deux vecteurs ne sont pas colinéaires.
Soit $\vec{w}$ un vecteur quelconque du plan $(\mathcal{P})$: vu que $(\vec{u}\ ;\ \vec{v})$ est une base de $(\mathcal{P})$, $\vec{w}$ s'écrit comme une combinaison linéaire des vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$: il existe des réels a et b tels que : $\vec{w} = a\,\vec{u} + b\,\vec{v}$.
On veut prouver que **$\vec{n}$ et $\vec{w}$ sont orthogonaux**, donc **on calcule naturellement le produit scalaire $\vec{n}.\vec{w}$:**

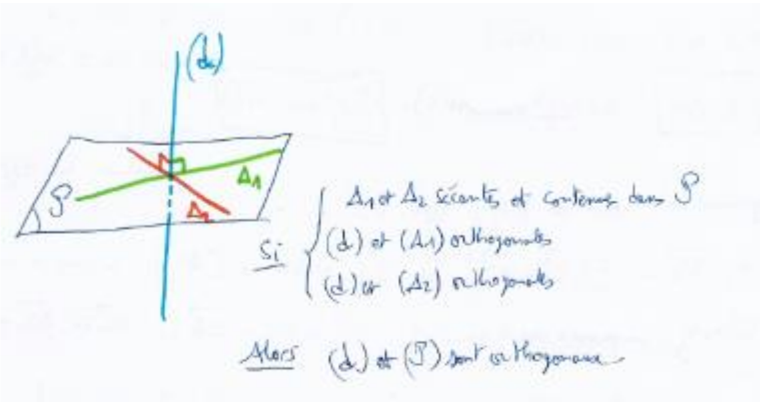
$\vec{n}.\vec{w} = \vec{n}.(a\vec{u} + b\vec{v}) = a\,\vec{n}.\vec{u} + b\,\vec{n}.\vec{v} = a \times 0 + b\times 0 = 0$ car $\vec{n}$ et $\vec{u}$ sont orthogonaux, donc $\vec{n}.\vec{u} = 0$ et de même, $\vec{n}.\vec{v} = 0$.

Ainsi, $\vec{n}$ et $\vec{w}$ sont orthogonaux pour tout vecteur $\vec{w}$ de $(\mathcal{P})$, donc par définition, $\vec{n}$ est normal à $(\mathcal{P})$.

Corollaire (fréquemment utilisé en pratique dans les exercices de type bac)

Pour qu'une droite de l'espace soit orthogonale à un plan $(\mathcal{P})$, il suffit qu'elle soit orthogonale à deux droites sécantes contenues dans $(\mathcal{P})$.

Illustration

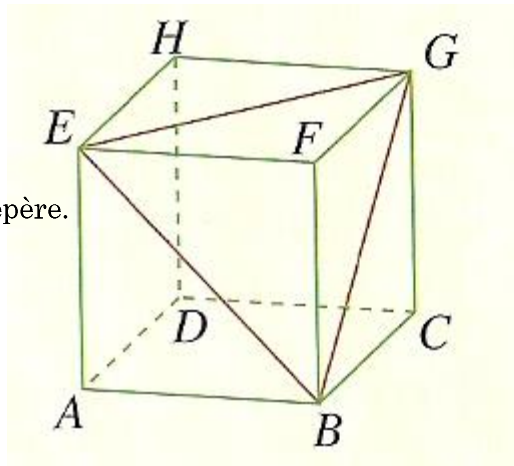


Remarque

Il est fondamental, dans le corollaire précédent, d'avoir deux droites sécantes. Pourquoi ?

Tracer deux droites parallèles sur une feuille de papier, et avec votre équerre, mettez un côté de l'angle droit sur l'une d'elle, pensez-vous que le deuxième côté de l'angle droit de l'équerre soit toujours orthogonal à la seconde droite ?????????? Si vous pensez que oui, faite pivoter votre équerre !

Exercice important (XXL)



ABCDEFGH est un cube muni du R.O.N. $(A\ ;\ \overrightarrow{AB}\ ;\ \overrightarrow{AD}\ ;\ \overrightarrow{AE})$.

a) Déterminer les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{AG}$, $\overrightarrow{BE}$ et $\overrightarrow{ED}$ dans ce repère.

b) Montrer que la droite (AG) est orthogonale au plan (BED).

Exercice 4

Soit ABCD un tétraèdre régulier, et I le milieu de [AB].

a) Par des arguments de géométrie de collège, démontrer que la droite (AB) et le plan (ICD) sont orthogonaux.

b) En déduire que les droites (AB) et (CD) sont orthogonales.

✂--

III-Equations cartésiennes d'un plan

Propriété XXXXL

Soit $\vec{n}$ un vecteur non nul de l'espace, et A un point de l'espace muni d'un R.O.N. $(O\ ;\ \vec{i}\ ;\ \vec{j}\ ;\ \vec{k})$.

1) Le plan $\mathcal{P}$ passant par A et orthogonal à $\vec{n}$ est l'ensemble des points M de l'espace tels que :
…………..

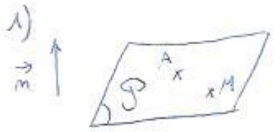
2*a*) ♥♥♥Tout plan $\mathcal{P}$ ayant pour vecteur normal le vecteur $\vec{n}\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ admet une <u>équation cartésienne</u> de la forme : ………………………... où $d \in \mathbb{R}$.♥♥♥

2*b*) ♥♥♥Réciproquement, si $(a\ ;\ b\ ;\ c) \neq (0\ ;\ 0\ ;\ 0)$, alors l'ensemble

$\mathcal{P} = \{M(x\ ;\ y\ ;\ z)\ /\ ax + by + cz + d = 0\}$ est un plan dont un vecteur normal est $\vec{n}\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$.♥♥♥

Preuve : *écrite sur la feuille ci-jointe.*

1)



2) $\vec{n}\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix}$ est normal à $(\mathcal{P})$ et $A\in(\mathcal{P})$.

$M\in(\mathcal{P}) \iff \overrightarrow{AM}\cdot\vec{n}=0$.

Notons $A(\alpha;\beta;\gamma)$ et $M(x;y;z)$ dans le r.o.n $(O;\vec{i};\vec{j};\vec{k})$:

$\overrightarrow{AM}\begin{pmatrix}x-\alpha\\y-\beta\\z-\gamma\end{pmatrix}$; $\vec{n}\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix}$. $M\in(\mathcal{P}) \iff \overrightarrow{AM}\cdot\vec{n}=0 \iff a(x-\alpha)+b(y-\beta)+c(z-\gamma)=0$

$M\in(\mathcal{P}) \iff ax-a\alpha+by-b\beta+cz-c\gamma=0 \iff ax+by+cz-(a\alpha+b\beta+c\gamma)=0$, On nomme $d=-(a\alpha+b\beta+c\gamma)$

Ainsi, $M\in(\mathcal{P}) \iff \underbrace{ax+by+cz+d=0}$ appelée une équation cartésienne de $(\mathcal{P})$.

2b) $(a;b;c)\neq(0;0;0)$ et $(\mathcal{P})=\{M(x;y;z)\,/\,ax+by+cz+d=0\}$.

*) Montrons déjà que $(\mathcal{P})\neq\emptyset$:

Vu que $(a;b;c)\neq(0;0;0)$, on peut sans perte de généralité, supposer que $a\neq0$.

Pour $y=z=0$, $ax+by+cz+d=0$ s'écrit donc : $ax+d=0$, donc $x=\frac{-d}{a}$ $(a\neq0)$.

Ainsi, $A(-\frac{d}{a};0;0)\in(\mathcal{P})$, donc $(\mathcal{P})\neq\emptyset$.

**) Soit $M(x;y;z)\in(\mathcal{P})$: on a donc : $ax+by+cz+d=0$.

Or, $\overrightarrow{AM}\begin{pmatrix}x-(-\frac{d}{a})\\y-0\\z-0\end{pmatrix}$, donc $\overrightarrow{AM}\begin{pmatrix}x+\frac{d}{a}\\y\\z\end{pmatrix}$ et soit $\vec{n}\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix}$.

$\overrightarrow{AM}\cdot\vec{n}=(x+\frac{d}{a})\times a+y\times b+z\times c=ax+by+cz+d$. Or par **), $ax+by+cz+d=0$.

Ainsi, $\overrightarrow{AM}\cdot\vec{n}=0$ et grâce à la caractérisation vue en 1) : $(\mathcal{P})$ est le plan passant par A et admettant $\vec{n}\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix}$ comme vecteur normal.

Exemples

$x - 2y + z + 3 = 0$ est l'équation d'un plan car cette dernière, qui se réécrit sous la forme :
$1x + (-2)y + 1z + 3 = 0$ est de la forme : $ax + by + cz + d = 0$ avec : $a = 1$; $b = -2$; $c = 1$ et $d = 3$ et que (1 ; -2 ; 1) n'est pas le triplet nul. Mieux, le vecteur $\vec{u}\begin{pmatrix} \\ \\ \\ \end{pmatrix}$ est un vecteur normal à ce plan.

Comment trouve-t-on les coordonnées d'un point appartenant à ce plan ?

Donnez à deux des inconnues de son choix les valeurs de son choix, et en résolvant l'équation, on obtient la valeur de la troisième inconnue.

Par exemple, je fais $x = 0$ et $y = 0$ dans la relation : $x - 2y + z + 3 = 0$ ce qui donne : $0 - 0 + z + 3 = 0$ donc $z = -3$ et par suite, le point A(0 ; 0 ; -3) appartient au plan d'équation $x - 2y + z + 3 = 0$.

Enfin un plan contient une infinité de points !!! Par exemple, ici, B(1 ; 0 ; -4) C(- 3 ; 0 ; 0) D(4 ; 2 ; -3) sont des points appartenant au plan d'équation : $x - 2y + z + 3 = 0$. !
Trouvez les coordonnées d'un autre point appartenant à ce plan !!

Remarques

Cas particuliers importants :

Le plan d'équation $x = 0$ correspond au plan…………………………………………………………..

Le plan d'équation $y = 0$ correspond au plan ………………………………………………………….

Le plan d'équation $z = 0$ correspond au plan ………………………………………………………….

Que dire de deux plans qui ont des vecteurs normaux égaux (ou colinéaires) ?

Exercice 5 (***le basique, à maîtriser parfaitement***)

Soit $(O ; \vec{i} ; \vec{j} ; \vec{k})$ un R.O.N. de l'espace, et A(1 ; 0 ; 2), B(3 ; 1 ; -1) et C(0 ; 0 ; 4).

On admet que A, B et C ne sont pas alignés.

1*a*) Vérifier que le vecteur $\vec{n}\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ est un vecteur normal au plan (ABC).

1*b*) En déduire une équation cartésienne du plan (ABC). (Question qui tombe avec une probabilité égale ou supérieure à 0,9999 au bac…).

2) Donner une représentation paramétrique de la droite (d) orthogonale au plan (ABC) et passant par le point K milieu de [AC].

3) Donner la nature et les éléments caractéristiques de l'ensemble $\mathcal{P}$ suivant :
$\mathcal{P} = \{M(x ; y ; z) / x - y + z + 5 = 0\}$.

4) On appelle plan médiateur du segment [BC] le plan $\mathcal{M}$ passant par le milieu I de [BC] et ayant pour vecteur normal $\overrightarrow{BC}$. Déterminer une équation cartésienne du plan $\mathcal{M}$.

Exercice 6 Soit (O ; $\vec{i}$; $\vec{j}$; $\vec{k}$) un repère orthonormé de l'espace.

a) Démontrez que les points A(2 ; 1 ; 3), B(-3 ; -1 ; 7) et C(3 ; 2 ; 4) définissent un plan $\mathcal{P}$.

b) Démontrer que la droite (d) dont une R.P. est : $\begin{cases} x = -7+2t \\ y = -3t \\ z = 4+t \end{cases}$ avec $t \in \mathbb{R}$ est orthogonale à $\mathcal{P}$.

c) En déduire une équation cartésienne de $\mathcal{P}$.

d) Soit D(1 ; 0 ; 5). Les points A, B, C et D sont-ils coplanaires ? Justifier.

e) Déterminer les coordonnées du point H intersection de (d) et de $\mathcal{P}$.

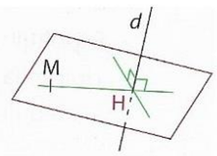
✂---

IV- Projeté orthogonal

A Projection orthogonale d'un point sur une droite

Définition

Le **projeté orthogonal** d'un point M sur une droite *d* est le point d'intersection H de *d* avec le plan passant par M et orthogonal à *d*.



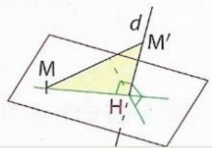
Remarques : • Le plan passant par M et orthogonal à *d* est unique.
• Lorsque M ∈ *d*, le projeté orthogonal de M sur *d* est le point M.

Propriété – Définition

Le projeté orthogonal H d'un point M sur une droite *d* est le point de *d* **le plus proche** de M.
On dit que MH est la **distance** du point M à la droite *d*.

Démonstration

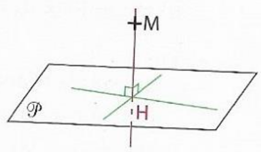
• Si M ∈ *d*, alors MH = 0 et H est le point de *d* le plus proche de M.
• Si M ∉ *d*, alors pour tout point M′ de *d*, le triangle MHM′ est rectangle en H, donc son hypoténuse est le côté le plus long soit MM′ > MH.
Donc H est le point de *d* le plus proche de M.



B Projection orthogonale d'un point sur un plan

Définition

Le **projeté orthogonal** d'un point M sur un plan $\mathcal{P}$ est le point d'intersection H du plan $\mathcal{P}$ et de la droite passant par M orthogonale à $\mathcal{P}$.



Remarque : lorsque M ∈ $\mathcal{P}$, le projeté orthogonal de M sur $\mathcal{P}$ est le point M.

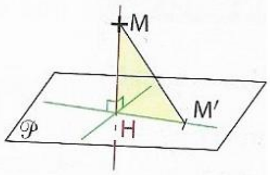
Propriété – Définition

Le projeté orthogonal H d'un point M sur un plan $\mathcal{P}$ est le point de $\mathcal{P}$ **le plus proche** de M.
On dit que MH est la **distance** du point M au plan $\mathcal{P}$.

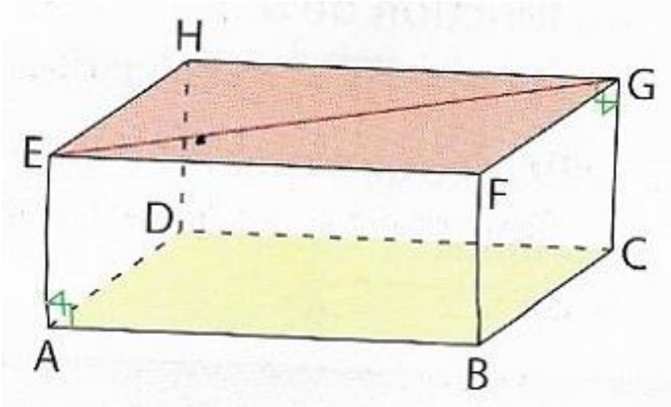
Démonstration

- Si $M \in \mathcal{P}$, alors $MH = 0$ et H est le point de $\mathcal{P}$ le plus proche de M.
- Si $M \notin \mathcal{P}$, alors pour tout point M′ de $\mathcal{P}$, le triangle MHM′ est rectangle en H, donc son hypoténuse est le côté le plus long, soit $MM' > MH$.

Donc H est le point de $\mathcal{P}$ le plus proche de M.



Exemple



Dans le pavé droit ABCDEFGH, ci-contre, déterminer :

a) Le projeté orthogonal du point H sur le plan (ABC).

b) Le projeté orthogonal du point E sur la droite (CG).

Exercice 7

Soit $(O\ ;\ \vec{i}\ ;\ \vec{j}\ ;\ \vec{k})$ un R.O.N. de l'espace.

Soit (d) la droite passant par A(1 ; -2 ; 1) et de vecteur directeur $\vec{u}\begin{pmatrix}-3\\1\\4\end{pmatrix}$ et B(-15 ; -10 ; 4).

On se propose de déterminer les coordonnées du point H, projeté orthogonal de B sur la droite (d).

a) Donner une équation cartésienne du plan $\mathcal{P}$ passant par B et orthogonal à (d).

b) En déduire les coordonnées du point H.

c) Calculer la distance du point B à la droite (d).

✂--

Exercice 8

Soit $(O\ ;\ \vec{i}\ ;\ \vec{j}\ ;\ \vec{k})$ un repère orthonormé de l'espace.

Soit $\mathcal{P}$ le plan passant par A(3 ; 1 ; -2) de de vecteur normal $\vec{n}\begin{pmatrix}4\\6\\3\end{pmatrix}$.

a) Donner une équation cartésienne de $\mathcal{P}$.

b) En déduire une équation cartésienne du plan $\mathcal{P}'$, parallèle à $\mathcal{P}$ et passant par le point B(-5 ; 0 ; 7).

Exercice 9

Soit A(1 ; -5 ; 3), B(2 ; -4 ; 4), C(-1 ; -2 ; 2) et D(18 ; -3 ; 25).

1. a. Démontrer que le triangle ABC est rectangle en A.

b. Déterminer l'aire du triangle ABC.

2. a. Démontrer que le vecteur $\vec{n}(-4\,;-1\,;5)$ est orthogonal aux deux vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$.

b. En déduire une équation du plan (ABC).

c. Vérifier que le point H(−2 ; −8 ; 0) est le projeté orthogonal de D sur le plan (ABC).

3. a. Déterminer la distance du point D au plan (ABC).

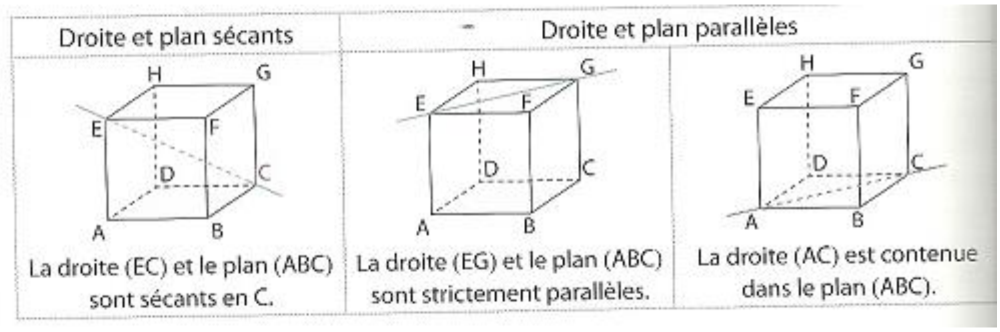
b. Calculer le volume du tétraèdre ABCD.

✂---

V-Positions relatives d'une droite et d'un plan de l'espace

A-Position relative d'une droite et d'un plan de l'espace

Une droite et un plan de l'espace sont soit sécants et ont alors un unique point d'intersection, soit parallèles et n'ont alors aucun point d'intersection.



Propriété (admise)

Soit (d) une droite de vecteur directeur $\vec{w}$, et $\mathcal{P}$ un plan de base $(\vec{u}\ ;\ \vec{v})$ et de vecteur normal $\vec{n}$.

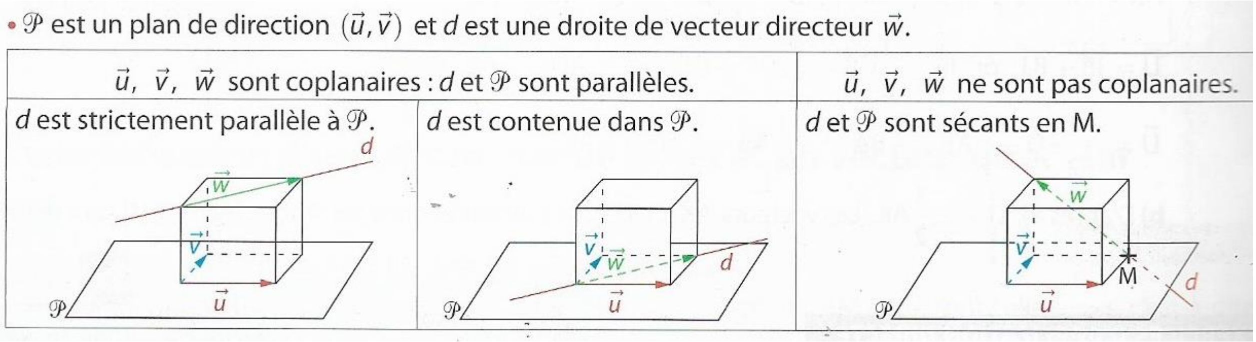
1. ♥♥♥ **(d) et $\mathcal{P}$ sont parallèles si et seulement si les vecteurs $\vec{w}$ *et* $\vec{n}$ sont ……………….♥♥♥**

2. **(d) et $\mathcal{P}$ sont sécantes si et seulement si les vecteurs $\vec{w}$ *et* $\vec{n}$ ne sont pas ……………….**

On a aussi les deux règles suivantes moins utilisées :

1bis. ♥♥♥ (d) et $\mathcal{P}$ sont parallèles si et seulement si les vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ sont ……………….♥♥♥

2bis. (d) et $\mathcal{P}$ sont sécantes si et seulement si les vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ ne sont pas ……………….



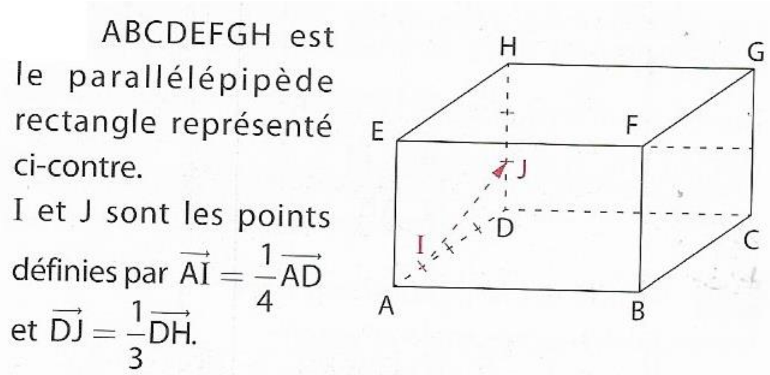
• $\mathscr{P}$ est un plan de direction $(\vec{u}, \vec{v})$ et d est une droite de vecteur directeur $\vec{w}$.

$\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{w}$ sont coplanaires : d et $\mathscr{P}$ sont parallèles.		$\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{w}$ ne sont pas coplanaires.
d est strictement parallèle à $\mathscr{P}$.	d est contenue dans $\mathscr{P}$.	d et $\mathscr{P}$ sont sécants en M.

Remarque : dans les exercices, sans vecteurs, lorsqu'on voudra justifier qu'une droite (d) et un plan $\mathscr{P}$ sont parallèles, il suffira donc de justifier que la droite (d) est parallèle à l'une des droites contenues dans le plan $\mathscr{P}$.

On procédera essentiellement de façon vectorielle.

Exercice 10



ABCDEFGH est le parallélépipède rectangle représenté ci-contre.
I et J sont les points définies par $\overrightarrow{AI} = \frac{1}{4}\overrightarrow{AD}$ et $\overrightarrow{DJ} = \frac{1}{3}\overrightarrow{DH}$.

a) Démontrer que les vecteurs $\overrightarrow{IJ}$, $\overrightarrow{BC}$ et $\overrightarrow{BF}$ sont coplanaires.

b) En déduire que la droite (IJ) et le plan (BCG) sont parallèles.

✂---

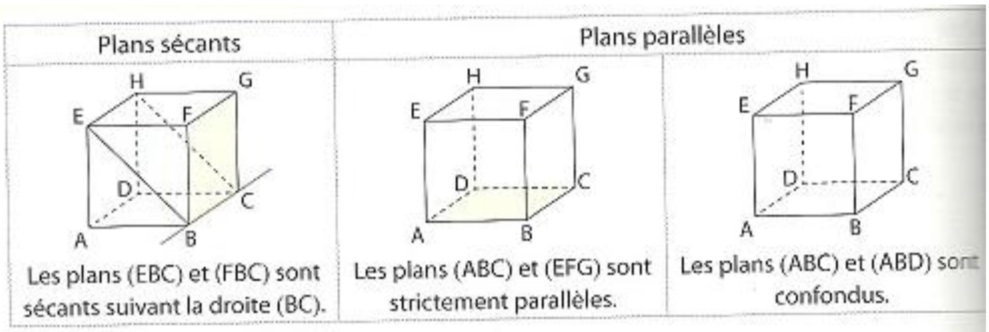
B- Position relative de deux plans de l'espace

Rappel : En géométrie dans l'espace, deux plans sont strictement parallèles lorsqu'ils n'ont aucun point en commun, confondus lorsqu'ils ont tous leurs points en commun.

Deux plans sont dits sécants lorsqu'ils ne sont ni parallèles ni confondus.

$\boxed{\textbf{\textit{Deux plans sécants se coupent (toujours) suivant une droite.}}}$

Illustration :



Plans sécants	Plans parallèles	
Les plans (EBC) et (FBC) sont sécants suivant la droite (BC).	Les plans (ABC) et (EFG) sont strictement parallèles.	Les plans (ABC) et (ABD) sont confondus.

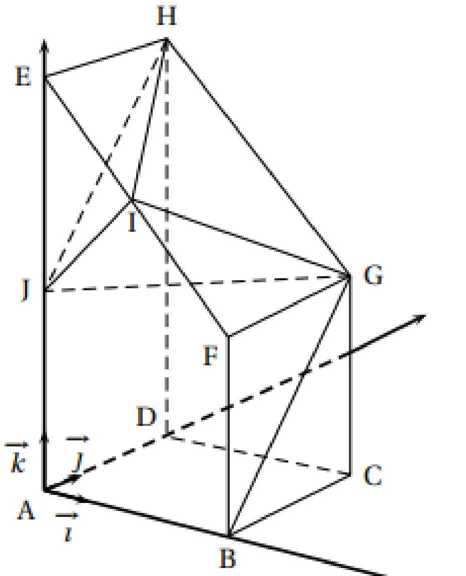
Quelques exercices issus de textes de baccalauréat

Exercice I

On considère le prisme droit ABFEDCGH, de base ABFE, trapèze rectangle en A.
On associe à ce prisme le repère orthonormé $\left(A\,;\,\vec{\imath}\,,\,\vec{\jmath}\,,\,\vec{k}\right)$ tel que :

$$\vec{\imath} = \frac{1}{4}\overrightarrow{AB},\quad \vec{\jmath} = \frac{1}{4}\overrightarrow{AD},\quad \vec{k} = \frac{1}{8}\overrightarrow{AE}.$$

De plus on a $\overrightarrow{BF} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AE}$.
On note I le milieu du segment [EF].
On note J le milieu du segment [AE].



1. Donner les coordonnées des points I et J.
2. Soit $\vec{n}$ le vecteur de coordonnées $\begin{pmatrix}-1\\1\\1\end{pmatrix}$.
   a. Montrer que le vecteur $\vec{n}$ est normal au plan (IGJ).
   b. Déterminer une équation cartésienne du plan (IGJ).
3. Déterminer une représentation paramétrique de la droite d, perpendiculaire au plan (IGJ) et passant par H.
4. On note L le projeté orthogonal du point H sur le plan (IGJ).
   Montrer que les coordonnées de L sont $\left(\frac{8}{3}\,;\,\frac{4}{3}\,;\,\frac{16}{3}\right)$.
5. Calculer la distance du point H au plan (IGJ).
6. Montrer que le triangle IGJ est rectangle en I.
7. En déduire le volume du tétraèdre IGJH.

   On rappelle que le volume V d'un tétraèdre est donné par la formule :
   $$V = \frac{1}{3} \times (\text{aire de la base}) \times \text{hauteur}.$$

Exercice II (métropole 2022)

Dans l'espace rapporté à un repère orthonormé $\left(O\,;\,\vec{\imath}\,,\,\vec{\jmath}\,,\,\vec{k}\right)$, on considère :

- le point A de coordonnées $(-1\,;\,1\,;\,3)$,
- la droite $\mathscr{D}$ dont une représentation paramétrique est : $\left\{\begin{array}{lll} x &=& 1+2t \\ y &=& 2-t, \quad t \in \mathbb{R}. \\ z &=& 2+2t \end{array}\right.$

On admet que le point A n'appartient pas à la droite $\mathscr{D}$.

1. **a.** Donner les coordonnées d'un vecteur directeur $\vec{u}$ de la droite $\mathscr{D}$.

   b. Montrer que le point $B(-1\,;\,3\,;\,0)$ appartient à la droite $\mathscr{D}$.

   c. Calculer le produit scalaire $\overrightarrow{AB} \cdot \vec{u}$.

2. On note $\mathscr{P}$ le plan passant par le point A et orthogonal à la droite $\mathscr{D}$, et on appelle H le point d'intersection du plan $\mathscr{P}$ et de la droite $\mathscr{D}$. Ainsi, H est le projeté orthogonal de A sur la droite $\mathscr{D}$.

   a. Montrer que le plan $\mathscr{P}$ admet pour équation cartésienne : $2x - y + 2z - 3 = 0$.

   b. En déduire que le point H a pour coordonnées $\left(\frac{7}{9}\,;\,\frac{19}{9}\,;\,\frac{16}{9}\right)$.

   c. Calculer la longueur AH. On donnera une valeur exacte.

3. Dans cette question, on se propose de retrouver les coordonnées du point H, projeté orthogonal du point A sur la droite $\mathscr{D}$, par une autre méthode.

   On rappelle que le point $B(-1\,;\,3\,;\,0)$ appartient à la droite $\mathscr{D}$ et que le vecteur $\vec{u}$ est un vecteur directeur de la droite $\mathscr{D}$.

   a. Justifier qu'il existe un nombre réel k tel que $\overrightarrow{HB} = k\vec{u}$.

   b. Montrer que $k = \dfrac{\overrightarrow{AB} \cdot \vec{u}}{\left\|\vec{u}\right\|^2}$.

   c. Calculer la valeur du nombre réel k et retrouver les coordonnées du point H.

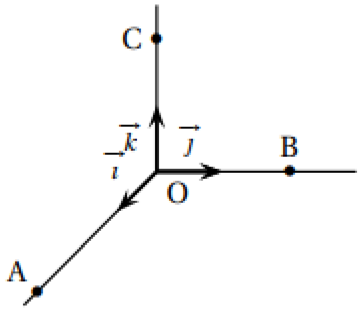
4. On considère un point C appartenant au plan $\mathscr{P}$ tel que le volume du tétraèdre ABCH soit égal à $\frac{8}{9}$.

   Calculer l'aire du triangle ACH.

   On rappelle que le volume d'un tétraèdre est donné par : $V = \frac{1}{3} \times \mathscr{B} \times h$ où $\mathscr{B}$ désigne l'aire d'une base et h la hauteur relative à cette base.

Exercice III

L'espace est muni d'un repère orthonormé $\left(O\,;\,\vec{\imath}\,,\,\vec{\jmath}\,,\,\vec{k}\right)$.
On considère les trois points A(3; 0; 0), B(0; 2; 0) et C(0; 0; 2).



L'objectif de cet exercice est de démontrer la propriété suivante :
« Le carré de l'aire du triangle ABC est égal à la somme des carrés des aires des trois autres faces du tétraèdre OABC »,

Partie 1 : Distance du point O au plan (ABC)

1. Démontrer que le vecteur $\vec{n}\,(2\,;\,3\,;\,3)$ est normal au plan (ABC).
2. Démontrer qu'une équation cartésienne du plan (ABC) est : $2x+3y+3z-6=0$.
3. Donner une représentation paramétrique de la droite d passant par O et de vecteur directeur $\vec{n}$.
4. On note H le point d'intersection de la droite d et du plan (ABC).
   Déterminer les coordonnées du point H.
5. En déduire que la distance du point O au plan (ABC) est égale à $\dfrac{3\sqrt{22}}{11}$.

Partie 2 : Démonstration de la propriété

1. Démontrer que le volume du tétraèdre OABC est égal à 2.
2. En déduire que l'aire du triangle ABC est égale à $\sqrt{22}$.
3. Démontrer que pour le tétraèdre OABC, « le carré de l'aire du triangle ABC est égal à la somme des carrés des aires des trois autres faces du tétraèdre ».
   On rappelle que le volume d'un tétraèdre est donné par $V=\dfrac{1}{3}B\times h$ où B est l'aire d'une base du tétraèdre et h est la hauteur relative à cette base.

Définition

On se place dans l'espace muni d'un repère orthonormé $(O\,;\,\vec{i}\,;\,\vec{j}\,;\,\vec{k})$.

Soit Ω un point de l'espace, et r un réel positif.

La sphère de centre Ω et de rayon r est l'ensemble de tous les points M de l'espace tels que $\Omega M = r$.

Illustration :

Propriété ***(à la frontière du programme)***

Dans un repère orthonormé $(O\ ;\ \vec{i}\ ;\ \vec{j}\ ;\ \vec{k})$, soit Ω un point de l'espace, et r un réel positif.

La sphère de centre Ω et de rayon r a pour équation réduite :

Exemple : Déterminer l'équation réduite de la sphère $\mathscr{S}$ de centre $\Omega(1\ ;\ 2\ ;-1)$ et de rayon $r = 3$.

Le point $M(2\ ;\ 0\ ;\ -1)$ appartient-il à $\mathscr{S}$?

Trouver les coordonnées du point diamétralement opposé sur $\mathscr{S}$ au point $K(1\ ;2\ ;-4)$. On commencera par vérifier que K appartient à $\mathscr{S}$.

Exercice IV

L'espace est muni d'un repère orthonormé $\left(O\,;\ \vec{\imath},\ \vec{\jmath},\ \vec{k}\right)$.
On considère les points $A(5\,;\,0\,;\,-1)$, $B(1\,;\,4\,;\,-1)$, $C(1;0;3)$, $D(5;4;3)$ et $E(10;9;8)$.

1. **a.** Soit R le milieu du segment [AB].
   Calculer les coordonnées du point R ainsi que les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{AB}$.

   b. Soit $\mathscr{P}_1$ le plan passant par le point R et dont $\overrightarrow{AB}$ est un vecteur normal. Démontrer qu'une équation cartésienne du plan $\mathscr{P}_1$ est :

$$x - y - 1 = 0.$$

   c. Démontrer que le point E appartient au plan $\mathscr{P}_1$ et que $EA = EB$.

2. On considère le plan $\mathscr{P}_2$ d'équation cartésienne $x - z - 2 = 0$.

   a. Justifier que les plans $\mathscr{P}_1$ et $\mathscr{P}_2$ sont sécants.

   b. On note Δ la droite d'intersection de $\mathscr{P}_1$ et $\mathscr{P}_2$.
   Démontrer qu'une représentation paramétrique de la droite Δ est :

$$\left\{\begin{array}{lcl} x & = & 2+t \\ y & = & 1+t \quad (t \in \mathbb{R}). \\ z & = & t \end{array}\right.$$

3. On considère le plan $\mathscr{P}_3$ d'équation cartésienne $y + z - 3 = 0$.
   Justifier que la droite Δ est sécante au plan $\mathscr{P}_3$ en un point Ω dont on déterminera les coordonnées.

Si S et T sont deux points distincts de l'espace, on rappelle que l'ensemble des points M de l'espace tels que $MS = MT$ est un plan, appelé plan médiateur du segment [ST]. On admet que les plans $\mathscr{P}_1$, $\mathscr{P}_2$ et $\mathscr{P}_3$ sont les plans médiateurs respectifs des segments [AB], [AC] et [AD].

4. **a.** Justifier que $\Omega A = \Omega B = \Omega C = \Omega D$.

   b. En déduire que les points A, B, C et D appartiennent à une même sphère dont on précisera le centre et le rayon.

Exercice V L'espace est muni d'un repère orthonormé $\left(\mathrm{O}\,;\ \vec{\imath},\ \vec{\jmath},\ \vec{k}\right)$.
On considère :

- le point A$(1\,;\,-1\,;\,-1)$;
- le plan $\mathscr{P}_1$, d'équation : $5x+2y+4z=17$;
- le plan $\mathscr{P}_2$ d'équation : $10x+14y+3z=19$;
- la droite $\mathscr{D}$ de représentation paramétrique :

$$\left\{\begin{array}{lcl} x & = & 1+2t \\ y & = & -t \\ z & = & 3-2t \end{array}\right. \quad \text{où } t \text{ décrit } \mathbb{R}.$$

1. Justifier que les plans $\mathscr{P}_1$ et $\mathscr{P}_2$ ne sont pas parallèles.
2. Démontrer que $\mathscr{D}$ est la droite d'intersection de $\mathscr{P}_1$ et $\mathscr{P}_2$.
3. **a.** Vérifier que A n'appartient pas à $\mathscr{P}_1$.
   b. Justifier que A n'appartient pas à $\mathscr{D}$.
4. Pour tout réel t, on note M le point de $\mathscr{D}$ de coordonnées $(1+2t\,;\,-t\,;\,3-2t)$.
   On considère alors la fonction f qui à tout réel t associe AM^2, soit $f(t)=\mathrm{A}M^2$.
   a. Démontrer que pour tout réel t, on a : $f(t)=9t^2-18t+17$.
   b. Démontrer que la distance AM est minimale lorsque M a pour coordonnées $(3\,;\,-1\,;\,1)$.
5. On note H le point de coordonnées $(3\,;\,-1\,;\,1)$.
   Démontrer que la droite (AH) est perpendiculaire à $\mathscr{D}$.

Exercice VI **(*Métropole* 2011)**

L'espace est muni d'un repère orthonormal $\left(\mathrm{O},\ \vec{\imath},\ \vec{\jmath},\ \vec{k}\right)$.

Partie A – Restitution organisée de connaissances

On désigne par $\mathscr{P}$ le plan d'équation $ax+by+cz+d=0$ et par M_0 le point de coordonnées $(x_0\,;\ y_0\,;\ z_0)$. On appelle H le projeté orthogonal du point M_0 sur le plan $\mathscr{P}$.

On suppose connue la propriété suivante :
Propriété : Le vecteur $\vec{n}=a\vec{\imath}+b\vec{\jmath}+c\vec{k}$ est un vecteur normal au plan $\mathscr{P}$.
Le but de cette partie est de démontrer que la distance $d(M_0,\mathscr{P})$ du point M_0 au plan $\mathscr{P}$, c'est-à-dire la distance M_0H, est telle que

$$d(M_0,\mathscr{P})=\frac{|ax_0+by_0+cz_0+d|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}.$$

1. Justifier que $\left|\vec{n}\cdot\overrightarrow{M_0H}\right|=M_0H\sqrt{a^2+b^2+c^2}$.
2. Démontrer que $\vec{n}\cdot\overrightarrow{M_0H}=-ax_0-by_0-cz_0-d$.
3. Conclure.

Partie B

On désigne par A, B, C, F les points de coordonnées respectives $(4;1;5)$, $(-3\,;\,2\,;\,0)$, $(1;3;6)$, $(-7\,;\,0\,;\,4)$.

1. **a.** Démontrer que les points A, B, C définissent un plan $\mathscr{P}$ et que ce plan a pour équation cartésienne $x+2y-z-1=0$.
   b. Déterminer la distance d du point F au plan $\mathscr{P}$.

Exercice VII

Par définition, la distance entre deux droites non coplanaires de l'espace, (d_1) et (d_2) est la longueur du segment [EF], où E et F sont des points appartenant respectivement à (d_1) et à (d_2) tels que la droite (EF) est orthogonale à (d_1) et (d_2).
L'espace est muni d'un repère orthonormé $\left(O\,;\,\vec{\imath}\,,\,\vec{\jmath}\,,\,\vec{k}\right)$.

Soit (d_1) la droite passant par A$(1\,;\,2\,;\,-1)$ de vecteur directeur $\overrightarrow{u_1}\begin{pmatrix}1\\2\\0\end{pmatrix}$ et (d_2) la droite dont une représentation paramétrique est : $\left\{\begin{array}{rcl} x &=& 0\\ y &=& 1+t\\ z &=& 2+t\end{array}\right.,\ t\in\mathbb{R}$.

1. Donner une représentation paramétrique de la droite (d_1).
2. Démontrer que les droites (d_1) et (d_2) sont non coplanaires.
3. Soit $\mathscr{P}$ le plan passant par A et dirigé par les vecteurs non colinéaires $\overrightarrow{u_1}$ et $\vec{w}\begin{pmatrix}2\\-1\\1\end{pmatrix}$.

   Justifier qu'une équation cartésienne du plan $\mathscr{P}$ est : $-2x+y+5z+5=0$.
4. **a.** Sans chercher à calculer les coordonnées du point d'intersection, justifier que la droite (d_2) et le plan $\mathscr{P}$ sont sécants.

   b. On note F le point d'intersection de la droite (d_2) et du plan $\mathscr{P}$.
   Vérifier que le point F a pour coordonnées $\left(0\,;\,-\dfrac{5}{3}\,;\,-\dfrac{2}{3}\right)$.

Soit (δ) la droite passant par F et de vecteur directeur $\vec{w}$. On admet que les droites (δ) et (d_1) sont sécantes en un point E de coordonnées $\left(-\dfrac{2}{3}\,;\,-\dfrac{4}{3}\,;\,-1\right)$.

5. **a.** Justifier que la distance EF est la distance entre les droites (d_1) et (d_2).

   b. Calculer la distance entre les droites (d_1) et (d_2).

Exercice VIII

Pour chacune des affirmations suivantes, indiquer si elle est vraie ou fausse.
Chaque réponse doit être justifiée. Une réponse non justifiée ne rapporte aucun point.
Dans cet exercice, les questions sont indépendantes les unes des autres.

Les quatre affirmations se placent dans la situation suivante :
Dans l'espace muni d'un repère orthonormé $\left(O\,;\,\vec{\imath}\,,\,\vec{\jmath}\,,\,\vec{k}\right)$, on considère les points :

$$A(2\,;\,1\,;\,-1),\quad B(-1\,;\,2\,;\,1)\ \text{et}\quad C(5\,;\,0\,;\,-3).$$

On note $\mathscr{P}$ le plan d'équation cartésienne :

$$x+5y-2z+3=0.$$

On note $\mathscr{D}$ la droite de représentation paramétrique :

$$\left\{\begin{array}{rcl} x &=& -t+3\\ y &=& t+2\\ z &=& 2t+1\end{array}\right.,\ t\in\mathbb{R}.$$

Affirmation 1 :
Le vecteur $\vec{n}\begin{pmatrix}1\\0\\2\end{pmatrix}$ est normal au plan (OAC).

Affirmation 2 :
Les droites $\mathscr{D}$ et (AB) sont sécantes au point C.

Affirmation 3 :
La droite $\mathscr{D}$ est parallèle au plan $\mathscr{P}$.

Affirmation 4 :
Le plan médiateur du segment [BC], noté $\mathscr{Q}$, a pour équation cartésienne :

$$3x-y-2z-7=0.$$

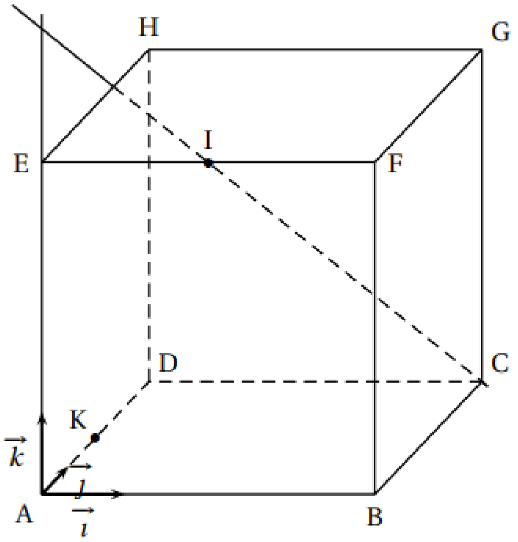
On rappelle que le plan médiateur d'un segment est le plan perpendiculaire à ce segment et passant par son milieu.

Exercice en rab

On considère un repère orthonormé $\left(A\,;\,\vec{\imath}\,,\,\vec{\jmath}\,,\,\vec{k}\right)$ de l'espace dans lequel on place le points

$$B(4\,;0\,;0),\quad D(0\,;4\,;0),\quad E(0\,;0\,;4)$$

et les points C, F, G et H de sorte que le solide ABCDEFGH soit un cube.



1. Donner les coordonnées des points C, F, G et H.

2. On considère le point I milieu de l'arête [EF].
Montrer qu'une représentation paramétrique de la droite (IC) est donnée par :

$$\left\{\begin{array}{lcl} x &=& 2+2t \\ y &=& 4t \\ z &=& 4-4t \end{array}\right. \quad \text{où } t \in \mathbb{R}.$$

3. On désigne par $\mathscr{P}$ le plan orthogonal à la droite (IC) passant par le point G, et par J l'intersection de $\mathscr{P}$ avec (IC).

a. Démontrer qu'une équation cartésienne du plan $\mathscr{P}$ est donnée par :

$$x+2y-2z-4=0.$$

b. Justifier que J a pour coordonnées $\left(\dfrac{28}{9}\,;\,\dfrac{20}{9}\,;\,\dfrac{16}{9}\right)$.
Que représente J par rapport à C ?

c. Vérifier que le point K(0 ; 2 ; 0) appartient au plan $\mathscr{P}$.

d. Justifier que (BK) est l'intersection des plans $\mathscr{P}$ et (ABC).

4. On rappelle que le volume d'une pyramide est donné par la formule $V = \dfrac{B \times h}{3}$, où B est l'aire d'une base et h la longueur de la hauteur relative à cette base.

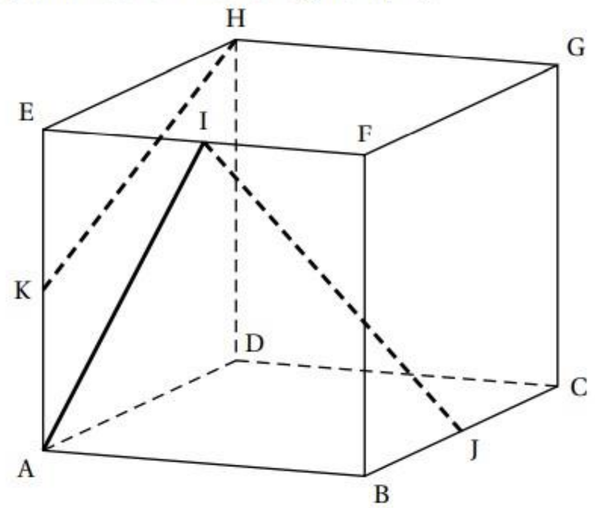
a. Déterminer le volume de la pyramide CBKG.

b. En déduire que l'aire du triangle BKG est égale à 12.

c. Justifier que la droite (BG) est incluse dans $\mathscr{P}$.

d. On note I′ un point de l'arête [EF], et P' le plan orthogonal à la droite (I′ C) passant par G.
Peut-on affirmer que la droite (BG) est incluse dans P' ?

On considère un cube ABCDEFGH. Le point I est le milieu du segment [EF], le point J est le milieu du segment [BC] et le point K est le milieu du segment [AE].



1. Les droites (AI) et (KH) sont-elles parallèles? Justifier votre réponse,

Dans la suite, on se place dans le repère orthonormé $\left(A\,;\ \overrightarrow{AB},\ \overrightarrow{AD},\ \overrightarrow{AE}\right)$.

2. **a.** Donner les coordonnées des points I et J.

b. Montrer que les vecteurs $\overrightarrow{IJ}$, $\overrightarrow{AE}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont coplanaires.

On considère le plan $\mathscr{P}$ d'équation $x+3y-2z+2=0$ ainsi que les droites d_1 et d_2 définies par les représentations paramétriques ci-dessous :

$$d_1 : \left\{\begin{array}{lcl} x & = & 3+t \\ y & = & 8-2t \\ z & = & -2+3t \end{array}\right.,\ t\in\mathbb{R} \quad \text{et} \quad d_2 : \left\{\begin{array}{lcl} x & = & 4+t \\ y & = & 1+t \\ z & = & 8+2t \end{array}\right.,\ t\in\mathbb{R}.$$

3. Les droites d_1 et d_2 sont-elles parallèles? Justifier votre réponse.

4. Montrer que la droite d_2 est parallèle au plan $\mathscr{P}$.

5. Montrer que le point L(4 ; 0 ; 3) est le projeté orthogonal du point M(5 ; 3 ; 1) sur le plan $\mathscr{P}$.