BACCALAURÉAT GÉNÉRAL

Session Blanche _ vendredi 7 février 2025 (8h-12h)
Lycée Alphonse BENOIT – L'Isle-sur-la-Sorgue

Spécialité Mathématiques
Durée de l'épreuve : 4 heures
Coefficient : 16

SUJET

L'usage de la calculatrice en <u>mode examen</u> uniquement est autorisé.

Dans chaque exercice, le candidat peut admettre un résultat précédemment donné dans le texte pour aborder les questions suivantes, à condition de l'indiquer clairement sur la copie.

Le candidat est invité à faire figurer sur la copie toute trace de recherche, même incomplète ou non fructueuse, qu'il aura développée.

Il est rappelé que la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements seront prises en compte dans l'appréciation des copies.

Ce sujet comporte six pages numérotées de 1/6 à 6/6.

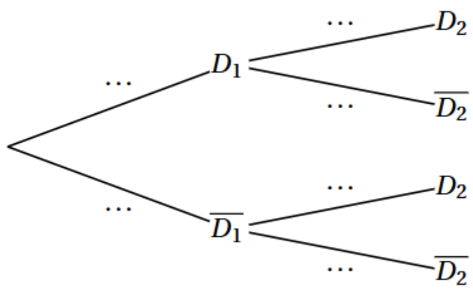
Exercice 1 – 5 points

Un robot est positionné sur un axe horizontal et se déplace plusieurs fois d'un mètre sur cet axe, aléatoirement vers la droite ou vers la gauche.
Lors du premier déplacement, la probabilité que le robot se déplace à droite est égale à $\frac{1}{3}$.
S'il se déplace à droite, la probabilité que le robot se déplace de nouveau à droite lors du déplacement suivant est égale à $\frac{3}{4}$.
S'il se déplace à gauche, la probabilité que le robot se déplace de nouveau à gauche lors du déplacement suivant est égale à $\frac{1}{2}$.
Pour tout entier naturel $n \geq 1$, on note D_n l'événement : « le robot se déplace à droite lors du n-ième déplacement ». On note p_n la probabilité de l'événement D_n. On a donc $p_1 = \frac{1}{3}$

- **<u>PARTIE A</u> : étude du cas particulier où n = 2**

Dans cette partie, le robot réalise deux déplacements successifs.

1. Reproduire et compléter l'arbre pondéré suivant :



2. Déterminer la probabilité que le robot se déplace deux fois à droite.
3. Montrer que $p_2 = \frac{7}{12}$

- **<u>PARTIE B</u> : étude de la suite (p_n)**

On souhaite estimer le déplacement du robot au bout d'un nombre important d'étapes.

1. Démontrer que pour tout entier naturel $n \geq 1$, on a : $p_{n+1} = \frac{1}{4}p_n + \frac{1}{2}$. On pourra s'aider d'un arbre.
2. On considère la suite (u_n) définie pour tout entier naturel $n \geq 1$, par $u_n = p_n - \frac{2}{3}$.
   a) Montrer que la suite (u_n) est géométrique et préciser son premier terme et sa raison.
   b) Déterminer la limite de la suite (p_n) et interpréter le résultat dans le contexte de l'exercice.

- **<u>PARTIE C</u> :**

Dans cette partie, on considère un autre robot qui réalise dix déplacements d'un mètre indépendants les uns des autres, chaque déplacement vers la droite ayant une probabilité fixe égale à $\frac{3}{4}$.
Soit X la variable aléatoire égale au nombre de déplacements vers la droite lors de ces dix déplacements.

a. Déterminer, en justifiant, la loi de probabilité suivie par X. On précisera ses paramètres.
b. Calculer la valeur de p(X=7) arrondie au centième près. Interpréter ce résultat.
c. Quelle est la probabilité que le robot revienne à sa position de départ après dix déplacements ? On arrondira à 10^{-3}près.
d. Quelle est la probabilité qu'au cours des dix déplacements le robot se dirige au moins une fois vers la droite ? On arrondira à 10^{-6} près.
e. Quelle est la probabilité qu'au cours des dix déplacements le robot fasse moins de déplacements vers la droite que vers la gauche ? On arrondira au dix-millième près.
f. Calculer l'espérance mathématique de X et interpréter cette dernière dans le contexte de l'exercice.

Exercice 2 – 5 points

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \frac{3}{4}x^2 - 2x + 3$.

1. Dresser le tableau de variations de f sur $\mathbb{R}$.
2. En déduire que pour tout x appartenant à l'intervalle $\left[\frac{4}{3} ; 2\right]$, $f(x)$ appartient à l'intervalle $[\frac{4}{3} ; 2]$.
3. Démontrer que pour tout x réel, $x \leq f(x)$.
   Pour cela, on pourra démontrer que pour tout réel x, $f(x) - x = \frac{3}{4}(x-2)^2$

On considère la suite (u_n) définie par un réel u_0 et pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = f(u_n)$.
On a donc pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = \frac{3}{4}u_n^2 - 2u_n + 3$

4. **<u>Etude du cas</u> : $\frac{4}{3} \leq u_0 \leq 2$**
   a) Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n, $u_n \leq u_{n+1} \leq 2$.
   b) En déduire que la suite (u_n) est convergente.
   c) Démontrer que la limite de la suite est égale à 2.

5. **<u>Etude du cas particulier</u> : $u_0 = 3$**
   On admet que dans ce cas la suite (u_n) tend vers $+\infty$.
   Recopier et compléter la fonction « seuil » suivante écrite en Python, afin qu'elle renvoie la plus petite valeur de n telle que u_n soit supérieur ou égal à 100.

```
def seuil() :
  u = 3
  n = 0
  while ...
      u = ...
      n = ...
  return n
```

6. **<u>Etude du cas</u> : $u_0 > 2$**
   A l'aide d'un raisonnement par l'absurde, montrer que (u_n) n'est pas convergente.

Exercice 3 – UNIQUEMENT POUR LE GROUPE DE M. MANCINI 4 points

VRAI OU FAUX ?

Déterminer si chacune des affirmations suivantes est vraie ou fausse, en justifiant votre réponse.
Toute réponse non justifiée ne rapportera aucun point.

On considère la fonction g définie sur]0 ; +∞[par $g(x) = 4\ln(3x)$

AFFIRMATION 1 : pour tout réel $x > 0$, $g(2x) = g(x) + \ln(16)$

On considère l'équation $[\ln(x)]^2 + 10\ln(x) + 21 = 0$ avec $x \in]0; +\infty[$.

AFFIRMATION 2 : cette équation admet exactement une solution sur]0 ; +∞[.

La fonction f ci-dessous est utilisée pour les affirmations 3 et 4 :

f est la fonction définie sur ℝ par $f(x) = \ln(1 + e^{-x})$. On note C_f sa courbe représentative.

AFFIRMATION 3 : f est concave sur ℝ.

On note T_0 la tangente à la courbe C_f en son point d'abscisse 0.

Pour tout nombre réel a différent de 0, on note M_a et N_a les points de la courbe C_f d'abscisses respectives a et -a. On a donc $M_a(-a ; f(-a))$ et $N_a(a ; f(a))$.

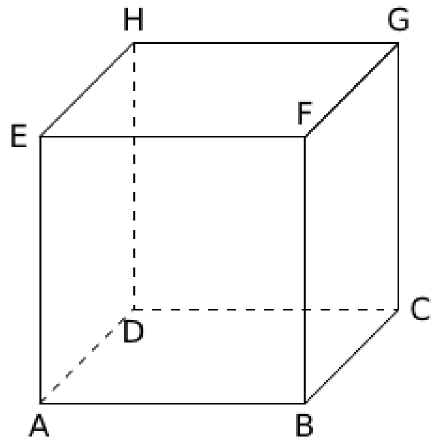
AFFIRMATION 4 : les droites T_0 et (M_aN_a) sont parallèles.

Exercice 3 – UNIQUEMENT POUR LES GROUPES DE M. HAEZEBAERT ET M. VIALLE

4 points

VRAI OU FAUX ?

Déterminer si chacune des affirmations suivantes est vraie ou fausse, en justifiant votre réponse.
Toute réponse non justifiée ne rapportera aucun point.



ABCDEFGH est un cube.
Le point M est le milieu du segment [EH].
Le point K est le milieu du segment [BC].
Le point N est tel que $\overrightarrow{DN} = \frac{1}{2}\overrightarrow{DC} + \frac{1}{2}\overrightarrow{DF}$.

L'espace est rapporté au repère $(A;\ \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AE})$
On considère le point P de coordonnées $\left(\frac{1}{4}; 1; 1\right)$

- **PROPOSITION 1** : les coordonnées du point N sont $\left(1 ; \frac{3}{2} ; \frac{1}{2}\right)$

- **PROPOSITION 2** : la droite (PM) a pour représentation paramétrique $\begin{cases} x = 0{,}25 + 0{,}5t \\ y = 1 + t \\ z = 1 \end{cases}$ $t \in \mathbb{R}$

On admet qu'une représentation paramétrique de (PK) est : $\begin{cases} x = 1 + 3t' \\ y = \frac{1}{2} - 2t' \\ z = -4t' \end{cases}$ $t' \in \mathbb{R}$

- **PROPOSITION 3** : les droites (MB) et (PK) sont non coplanaires.

- **PROPOSITION 4** : les vecteurs $\overrightarrow{EB}, \overrightarrow{AK}\ et\ \overrightarrow{AG}$ sont coplanaires.

Exercice 4 – 6 points

- ***Partie A***

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \frac{4}{e^x+1}$ *et* C_f sa courbe représentative.

1. Calculer, en justifiant, les limites de f en $+\infty$ et en $-\infty$.
2. Interpréter graphiquement ces limites.
3. On admet que pour tout réel x, $f''(x) = \frac{4e^x(e^x-1)}{(e^x+1)^3}$ où f'' désigne la dérivée seconde de f.

Etudier la convexité de f sur $\mathbb{R}$ et déterminer le nombre de points d'inflexion de C_f.

- ***Partie B***

Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = e^x - xe^x + 1$

1. Calculer, en justifiant, les limites de $g(x)$ en $+\infty$ et en $-\infty$.

2. a) Démontrer que pour tout réel x, $g'(x) = -xe^x$

b) En déduire le sens de variation de g sur $\mathbb{R}$, puis dresser le tableau de variation de g.

3. a) Montrer en justifiant, que l'équation $g(x) = 0$ admet une unique solution sur $\mathbb{R}$ qu'on notera α.

b) Donner un encadrement à 10^{-2} près de α en justifiant.

c) Démontrer que $e^{\alpha} = \frac{1}{\alpha-1}$

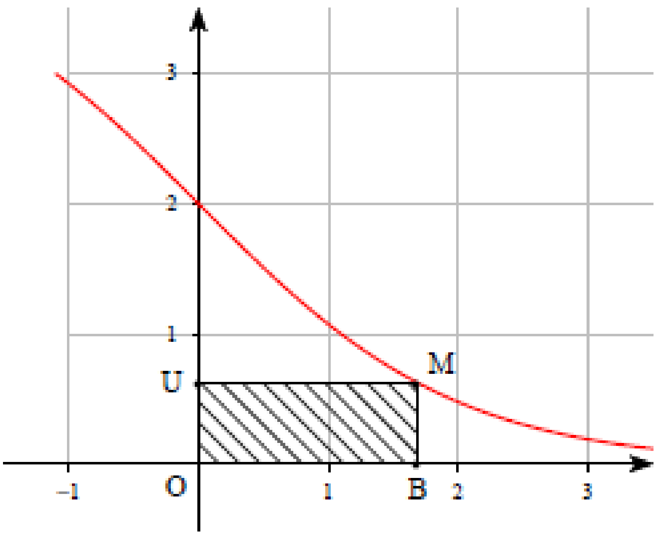
4. Etudier le signe de g sur $\mathbb{R}$ et dresser son tableau de signes.

- ***Partie C***

On donne ci-contre la courbe C_f représentative de f dans un repère orthonormé, où f est la fonction définie à la *partie A*.

Soit M un point appartenant à C_f et on note x l'abscisse du point M.

Le point B est le point de l'axe des abscisses qui a la même abscisse que M. Le point U est le point de l'axe des ordonnées qui a la même ordonnée que M.



1. Exprimer, en fonction de x, les coordonnées des points *M, B* et *U*.

2. Soit la fonction A qui, à tout réel $x \geq 0$, associe l'aire du rectangle *OBMU*.

a. Exprimer $A(x)$ en fonction de x.

b. Démontrer que $A'(x) = \frac{4g(x)}{(e^x+1)^2}$

où *g* est la fonction définie à la partie *B* et A′ la dérivée de A.

c. En déduire le sens de variation de la fonction A sur $[0; +\infty[$.

3. Montrer que l'aire du rectangle *OBMU* est maximale lorsque *M* a pour abscisse α, où α est le réel défini à la partie *B*.

4. Démontrer que la tangente à la courbe C_f en son point d'abscisse α et la droite *(BU)* sont parallèles.