Exercice I

Dans la tirelire de Nina, il y a entre 900 et 1000 pièces de monnaie.

Si elle fait des rouleaux de 17 pièces, il lui en reste 9. Si elle fait des rouleaux de 5 pièces il lui en reste 3.

Combien de pièces Nina a -t-elle ? Justifier.

Exercice II

On considère l'équation (E) : $6x + 7y = 55$, où les inconnues x et y sont des nombres entiers.

1) Trouver deux couples de solutions particulières de (E) par deux méthodes différentes.

2) Résoudre dans $\mathbb{Z}^2$ l'équation (E).

3) En déduire les coordonnées des points de la droite d'équation : $y = \frac{-6x+55}{7}$ qui sont des entiers naturels.

Exercice III

Ecrire en langage Python un algorithme qui demande à l'utilisateur un entier supérieur ou égal à 2 de son choix, et qui renvoie en sortie la liste de ses diviseurs premiers.

Exercice IV

a et b sont deux entier naturel premiers entre eux.

1) Montrer que les entiers a et b^2 sont également premiers entre eux.

2)

Montrer que pour tout entier naturel $n \geqslant 1$, les entiers a et b^n sont premiers entre eux.

Indication : on pourra utiliser la formule du binôme de Newton couplée à l'identité de Bézout.

3) En déduire que pour tous entiers naturels n et p non nuls, a^p et b^n sont premiers entre eux.

Exercice V

m et n sont des entiers naturels non nuls. On note $\mathbb{U}_n$ l'ensemble des racine $n^{\text{ièmes}}$ de l'unité.

1) Montrer que si m divise n, alors tout élément de $\mathbb{U}_m$ appartient également à $\mathbb{U}_n$.

2) Soit $d =$ PGCD(m ; n).

Montrer que : $\mathbb{U}_d = \mathbb{U}_m \cap \mathbb{U}_n$.