Intégralité du cours avec corrigé : 20TrigoT (maths-et-tiques.fr)

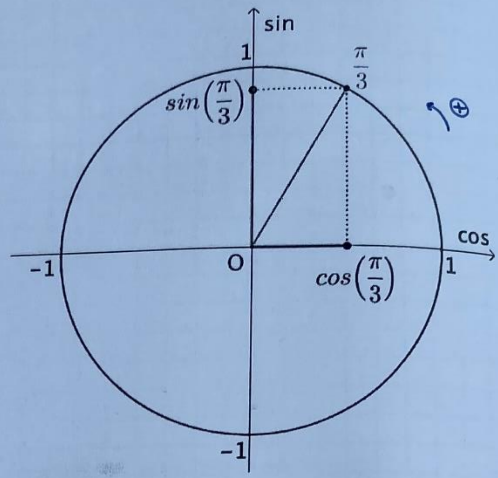
Partie 1 : Cosinus, sinus et cercle trigonométrique

1) Définitions et propriétés

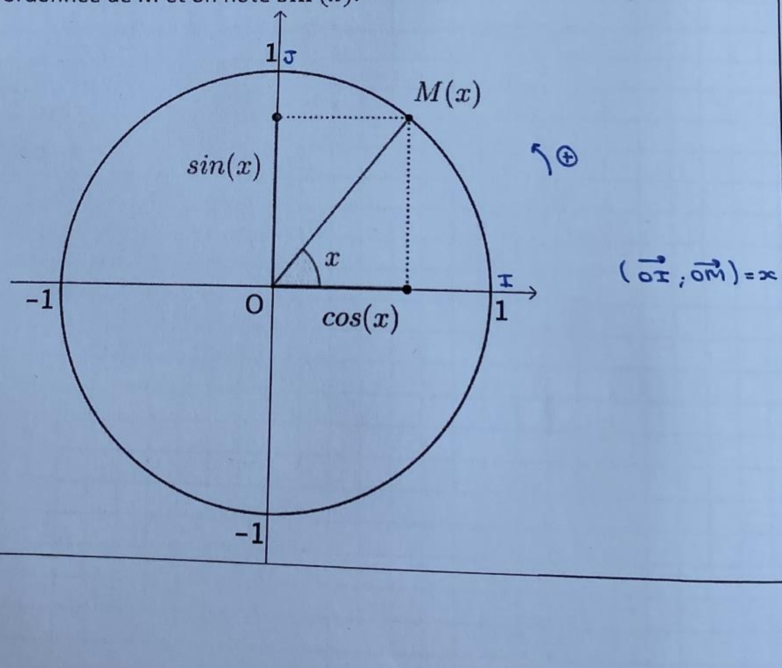
Exemple :

→ rayon = 1

A l'aide du cercle trigonométrique, il est possible de lire le cosinus et le sinus d'un nombre.
Le cosinus se lit sur l'axe des abscisses et le sinus sur l'axe des ordonnées.



Définitions : Soit M le point du cercle trigonométrique associé au nombre x (qui est un angle orienté).
- Le **cosinus** de x est l'abscisse de M et on note $\cos(x)$.
- Le **sinus** de x est l'ordonnée de M et on note $\sin(x)$.



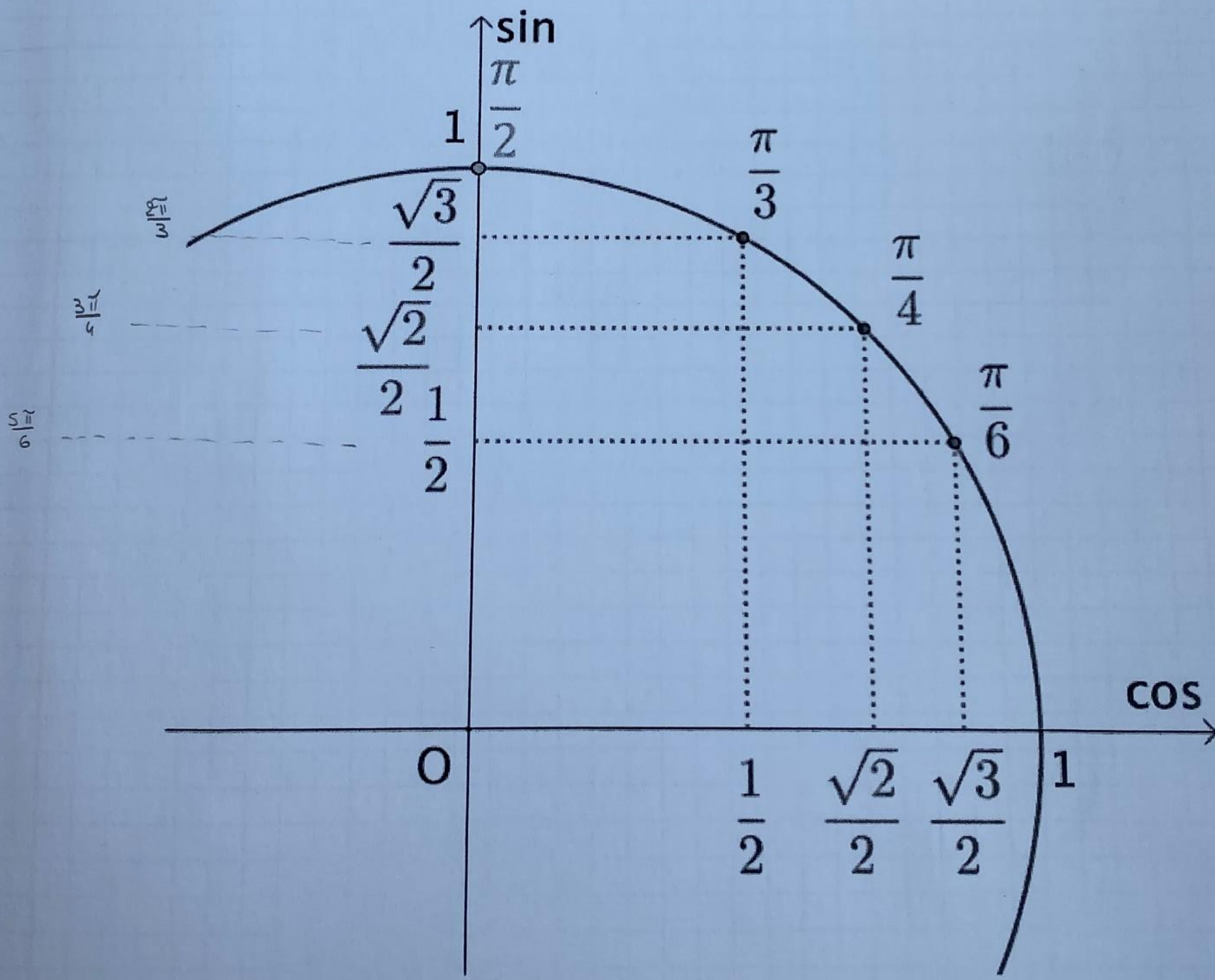
Propriétés :

1) $-1 \leq \sin(x) \leq 1$ et $-1 \leq \cos(x) \leq 1$

2) $\cos^2(x) + \sin^2(x) = 1$

3) Valeurs remarquables des fonctions cosinus et sinus :

x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	π
$\cos(x)$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	-1
$\sin(x)$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	0



Méthode : Résoudre une équation et une inéquation trigonométrique

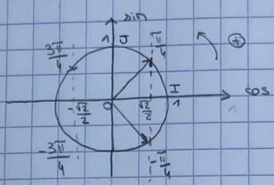
1) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation : $\cos^2(x) = \frac{1}{2}$.

2) Résoudre dans $[-\pi\ ;\ \pi]$, l'inéquation : $\sin(x) \leq \frac{\sqrt{3}}{2}$.

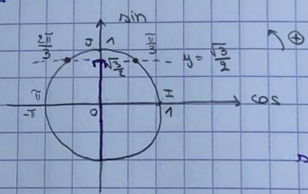
1) $\cos^2(x) = \frac{1}{2}$ avec $-\pi \leq x \leq \pi$

équivaut à : $\cos(x) = -\sqrt{\frac{1}{2}} = \frac{-\sqrt{2}}{2}$ ou $\cos(x) = \sqrt{\frac{1}{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$

$S_{[-\pi;\pi]} = \left\{ -\frac{3\pi}{4} ; -\frac{\pi}{4} ; \frac{\pi}{4} ; \frac{3\pi}{4} \right\}$



2) $\sin(x) \leq \frac{\sqrt{3}}{2}$ avec $-\pi \leq x \leq \pi$



$S_{[-\pi;\pi]} = \left[-\pi ; \frac{\pi}{3}\right] \cup \left[\frac{2\pi}{3} ; \pi\right]$

sinus $< \frac{\sqrt{3}}{2}$

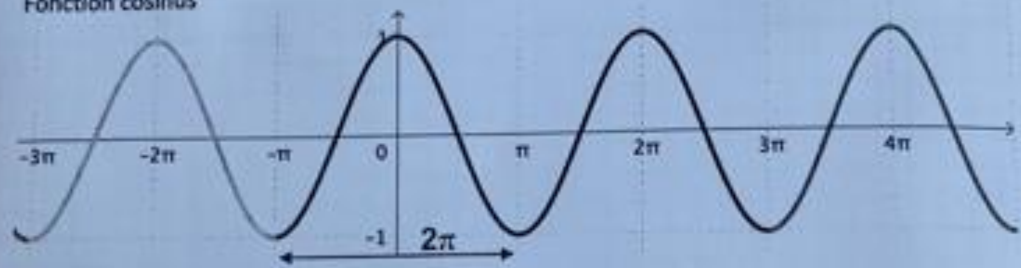
2) Périodicité

Propriétés : 1) $\cos(x) = \cos(x + 2k\pi)$ où k entier relatif.
2) $\sin(x) = \sin(x + 2k\pi)$ où k entier relatif.

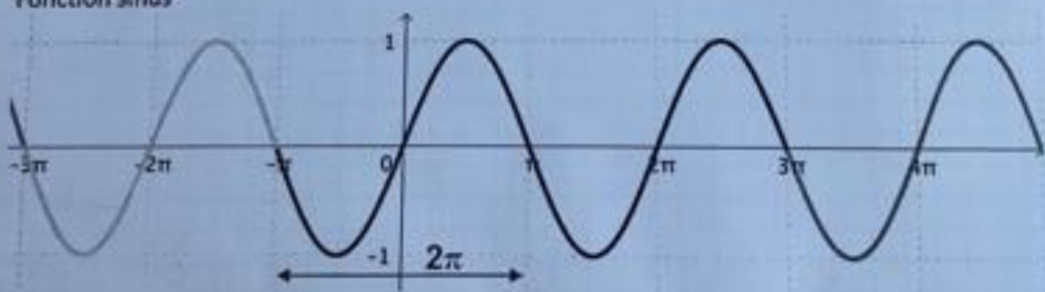
Démonstration : Aux points de la droite orientée d'abscisses x et $x + 2k\pi$ ont fait correspondre le même point du cercle trigonométrique.

Remarque : $\forall x \in \mathbb{R},\ g(x + 2\pi) = g(x)$
On dit que les fonctions cosinus et sinus sont **périodiques de période 2π**.
Cela signifie qu'on retrouve le même morceau de courbe sur chaque intervalle de longueur 2π.

Fonction cosinus



Fonction sinus



3) Parité

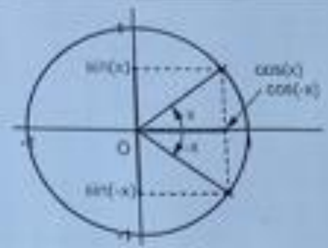
Définitions : - Une fonction dont la courbe est symétrique par rapport à l'axe des ordonnées est une **fonction paire**.
- Une fonction dont la courbe est symétrique par rapport à l'origine du repère est une **fonction impaire**.

Remarques : $\forall x \in \mathbb{R}$
- Pour une fonction paire, on a : $f(-x) = f(x)$.
- Pour une fonction impaire, on a : $f(-x) = -f(x)$.

Ce sont ces résultats qu'il faudra vérifier pour prouver qu'une fonction est paire ou impaire.

Propriétés :
- La fonction cosinus est paire et on a : $\cos(-x) = \cos(x)$
- La fonction sinus est impaire et on a : $\sin(-x) = -\sin(x)$

Démonstration :
Les angles de mesures x et $-x$ sont symétriques par rapport à l'axe des abscisses donc :
$\sin(-x) = -\sin x$ et $\cos(-x) = \cos x$.



Remarques :
- La courbe de la fonction cosinus est symétrique par rapport à l'axe des ordonnées.
- La courbe de la fonction sinus est symétrique par rapport à l'origine.

Méthode : Étudier la parité d'une fonction trigonométrique

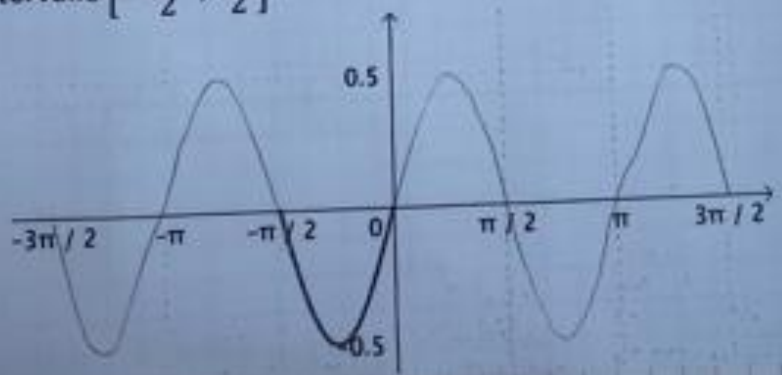
Démontrer que la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \sin(x) - \sin(2x)$ est impaire.

$\forall x \in \mathbb{R}$, $f(-x) = \sin(-x) - \sin(-2x)$
$f(-x) = -\sin(x) - (-\sin(2x))$ } imparité du sinus
$f(-x) = -(\sin(x) - \sin(2x))$
$f(-x) = -f(x)$
Donc f est impaire sur $\mathbb{R}$.

Méthode : Compléter un graphique par parité et périodicité

$\forall x \in \mathbb{R}, f(x+\pi) = f(x)$

Soit f une fonction impaire et périodique de période π. Compléter sa représentation graphique sur l'intervalle $\left[-\frac{3\pi}{2} ; \frac{3\pi}{2}\right]$.

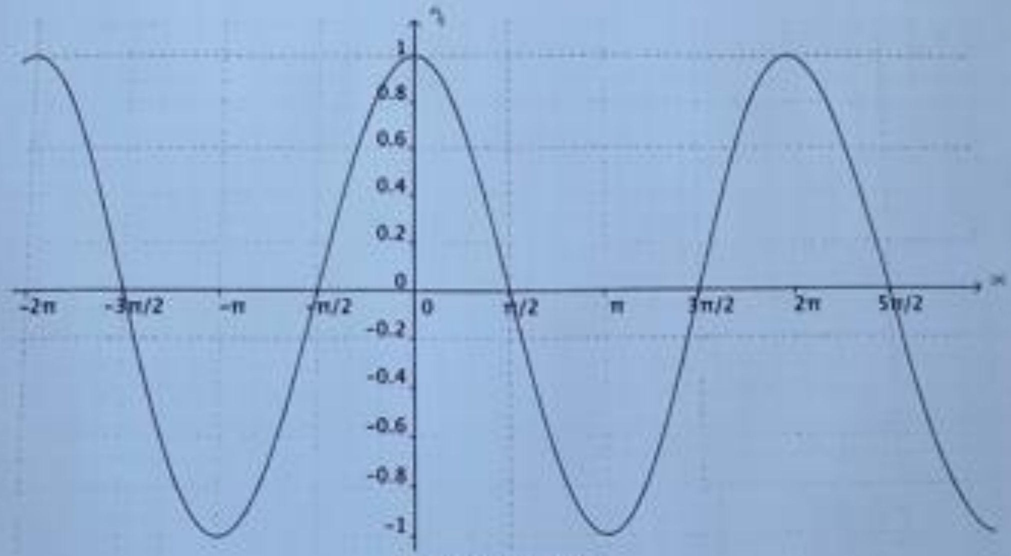


Partie 2 : Propriétés des fonctions cosinus et sinus

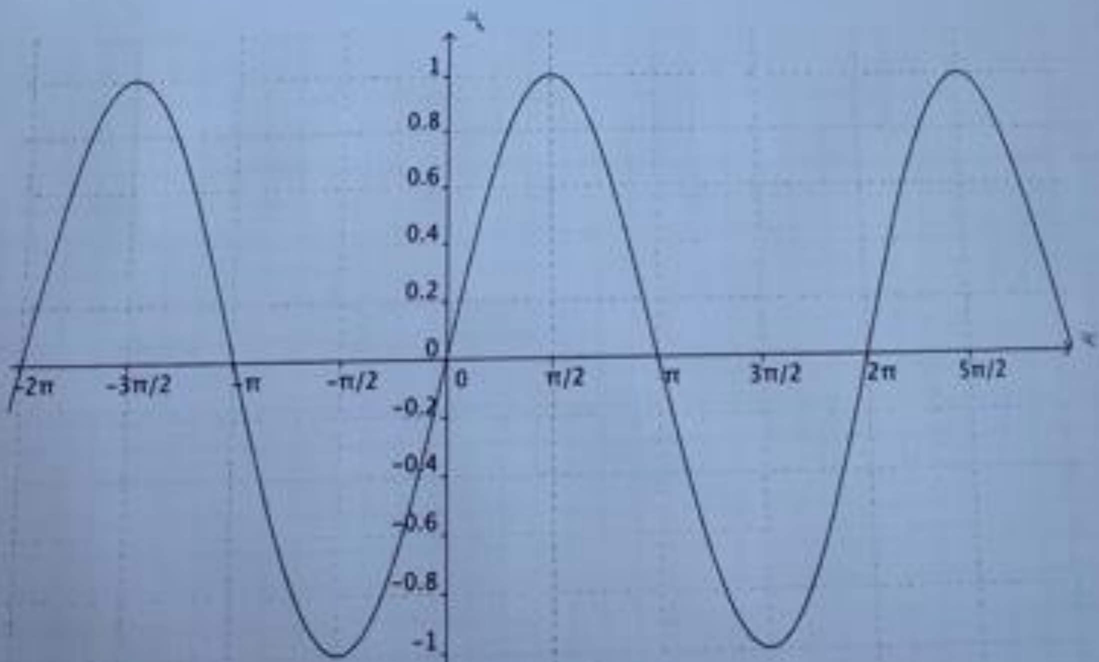
1) Définitions

Définitions :

- La **fonction cosinus** est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ qui, à tout réel x, associe $\cos(x)$.
- La **fonction sinus**, est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ qui, à tout réel x, associe $\sin(x)$.

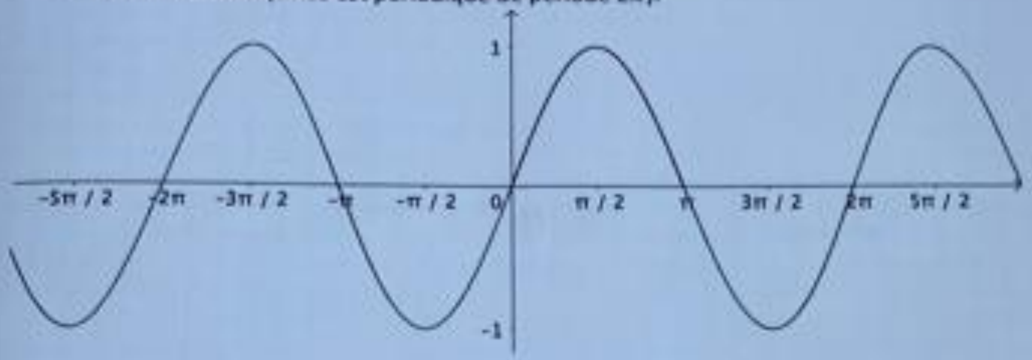


Fonction cosinus



Fonction sinus

- On retrouve la représentation graphique de sinus en complétant les données du tableau de variations :
  - par symétrie avec l'origine du repère (sinus est impaire),
  - par translation (sinus est périodique de période 2π).



Méthode : Étudier une fonction trigonométrique

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \cos(2x) - \frac{1}{2}$.

a) Étudier la parité de f.

b) Démontrer que la fonction f est périodique de période π.

c) Étudier les variations de f sur $\left[0 ; \frac{\pi}{2}\right]$.

d) Représenter graphiquement la fonction f sur $\left[0 ; \frac{\pi}{2}\right]$ et prolonger de part et d'autre la représentation par symétrie et par translation.

a) $\forall x \in \mathbb{R}$, $f(-x) = \cos(-2x) - \frac{1}{2}$

$f(-x) = \cos(2x) - \frac{1}{2}$ car cos est paire

$f(-x) = f(x)$

Donc f est paire sur $\mathbb{R}$.

b) $\forall x \in \mathbb{R}$, $f(x+\pi) = \cos(2(x+\pi)) - \frac{1}{2}$

$f(x+\pi) = \cos(2x+2\pi) - \frac{1}{2}$

$f(x+\pi) = \cos(x) - \frac{1}{2} = f(x)$ cos est 2π périodique

Donc f est périodique de période π (π-périodique).

c) $f(x) = \cos(2x) - \frac{1}{2}$

f est dérivable sur $\left[0 ; \frac{\pi}{2}\right]$ et $f'(x) = -2\sin(2x) - 0 = -2\sin(2x)$

Ici, $x \in [0;\frac{\pi}{2}]$:

Signe de $f'(x)$: $0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}$

$0 \leq 2x \leq \pi$

Or sur $[0;\pi]$ sin est à valeurs positives ou nulles.

Donc $\sin(2x) \geq 0$, et $-2 < 0$ donc $-2\sin(2x) \leq 0$ sur $[0,\frac{\pi}{2}]$.

Conclusion : $\forall x \in [0;\frac{\pi}{2}]$, $f'(x) \leq 0$.

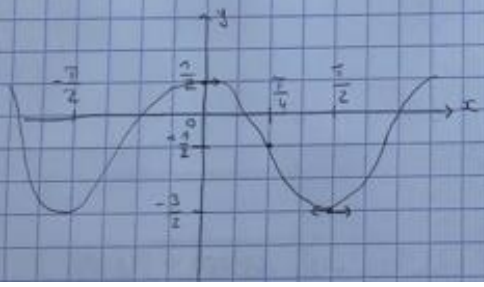
Donc f décroît sur $[0,\frac{\pi}{2}]$.

x	0		$\frac{\pi}{2}$
$f'(x)$	0	$-$	0
$f(x)$	$\frac{1}{2}$		$-\frac{3}{2}$

$f(0) = \cos(2\times 0) - \frac{1}{2} = \cos(0) - \frac{1}{2} = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$

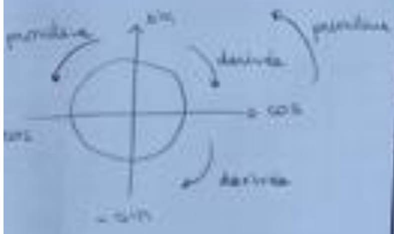
$f\left(\frac{\pi}{2}\right) = \cos\left(2\times\frac{\pi}{2}\right) - \frac{1}{2} = \cos(\pi) - \frac{1}{2} = -1 - \frac{1}{2} = \frac{-3}{2}$

d)



Partie 3 : Variations des fonctions cosinus et sinus

1) Dérivées



Fonction	Dérivée	Primitive
$\cos(x)$	$-\sin(x)$	$\sin(x)$
$\sin(x)$	$\cos(x)$	$-\cos(x)$
$\cos(ax+b)$ a et b réels	$-a\sin(ax+b)$	$\frac{\sin(ax+b)}{a}$
$\sin(ax+b)$ a et b réels	$a\cos(ax+b)$	$\frac{-\cos(ax+b)}{a}$

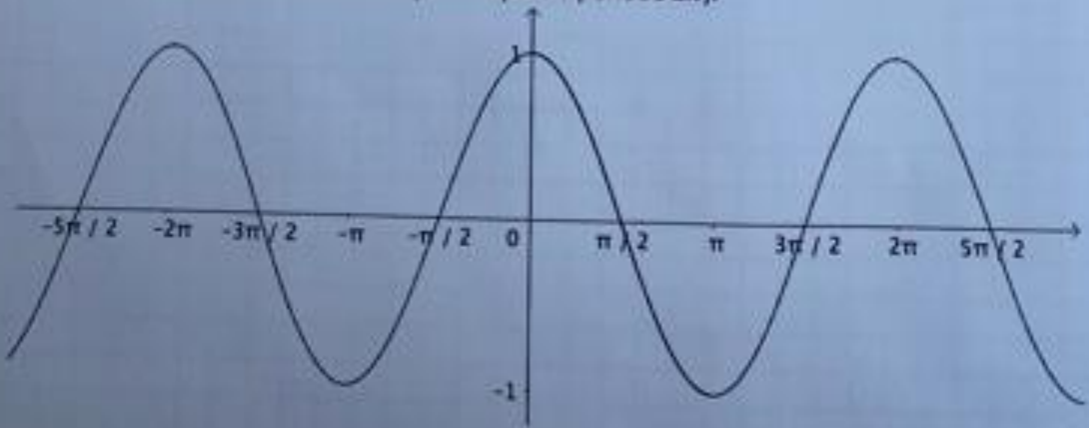
2) Tableaux de variations

x	0		π
$\cos'(x) = -\sin(x)$	0	$-$	0
$\cos(x)$	1	$\searrow$	-1

x	0		$\frac{\pi}{2}$		π
$\sin'(x) = \cos(x)$		$+$	0	$-$	
$\sin(x)$	0	$\nearrow$	1	$\searrow$	0

3) Représentations graphiques

- On retrouve la représentation graphique de cosinus en complétant les données du tableau de variations :
  - par symétrie avec l'axe des ordonnées (cosinus est paire),
  - par translation (cosinus est périodique de période 2π).



Sujet 0 du bac

Cet exercice est un questionnaire à choix multiples.
Pour chaque question, une seule des quatre propositions est exacte. Indiquer sur la copie le numéro de la question et la lettre de la proposition choisie.
Aucune justification n'est demandée.
Pour chaque question, une réponse exacte rapporte un point. Une réponse fausse, une réponse multiple ou l'absence de réponse ne rapporte ni n'enlève de point.
Les questions sont indépendantes.

1. Sur l'intervalle $[0 ; 2\pi]$, l'équation

$$\sin(x) = 0,1$$

admet :

a. zéro solution

b. une solution

c. deux solutions

d. quatre solutions

2. On considère la fonction f définie sur l'intervalle $[0 ; \pi]$ par

$$f(x) = x + \sin(x).$$

On admet que f est deux fois dérivable.

a. La fonction f est convexe sur l'intervalle $[0 ; \pi]$

b. La fonction f est concave sur l'intervalle $[0 ; \pi]$

c. La fonction f admet sur l'intervalle $[0 ; \pi]$ un unique point d'inflexion

d. La fonction f admet sur l'intervalle $[0 ; \pi]$ exactement deux points d'inflexion

1. $0 \leq x \leq 2\pi$

$\sin(x) = 0,1$

Posons $f(x) = \sin(x)$ avec : $0 \leq x \leq 2\pi$

$f'(x) = \cos(x)$

x	0		α		$\frac{\pi}{2}$		β		$\frac{3\pi}{2}$		2π
$f'(x)$			$+$		0		$-$		0	$+$	
$f(x)$	0	$\nearrow$	$0,1$	$\nearrow$	1	$\searrow$	$0,1$	$\searrow$	-1	$\nearrow$	0

Justifions que $\sin(x) = 0,1$ a une unique sol° sur $[0, \frac{\pi}{2}]$.

- f est continue sur $[0, \frac{\pi}{2}]$ car dérivable.
- f est strictement croissante sur $[0, \frac{\pi}{2}]$.
- $0 \leq 0,1 \leq 1$: donc $0,1$ est valeur intermédiaire pour f.

Donc d'après le corollaire du théorème des valeurs intermédiaires, l'équa° $\sin(x) = 0,1$ admet une unique sol° notée α sur $[0, \frac{\pi}{2}]$.

Idem sur $[\frac{\pi}{2} ; \frac{3\pi}{2}]$.

Enfin sur $[\frac{3\pi}{2} ; 2\pi]$ aucune sol° car sur cet intervalle $\sin(x) \leq 0$.

Conclusion : $\sin(x) = 0,1$ a deux solu° sur $[0 ; 2\pi]$.

Réponse c.

2\. $f(x) = x + \sin(x)$ avec $x \in [0; \pi]$.

$f'(x) = 1 + \cos(x)$

$f''(x) = -\sin(x)$

Or sur $[0; \pi]$, $\sin(x) \geq 0$.

Donc $f''(x) \leq 0$ donc f concave sur $[0; \pi]$.

Réponse b.